**UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE**
**FACULDADE DE ECONOMIA**
**Mestrado em Ciências Actuariais**

# A Aplicabilidade da Programação Linear na Optimização de Carteiras de Investimentos em Segurança Social

**Autor:** Leonardo José Langa

**Supervisor:** Prof. Doutor José Manuel da Silva Pereira

Abril de 2019

**UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE**
**FACULDADE DE ECONOMIA**
**Mestrado em Ciências Actuariais**

# A Aplicabilidade da Programação Linear na Optimização de Carteiras de Investimentos em Segurança Social

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciências Actuariais da Faculdade de Economia, da Universidade Eduardo Mondlane, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre, sob orientação do Prof. Doutor José Manuel da Silva Pereira.

Abril de 2019

## DECLARAÇÃO

Declaro por minha honra que esta dissertação decorre da minha investigação, estando indicadas no texto, a bibliografia e as fontes utilizadas. Declaro ainda que, em nenhum momento, ela foi apresentada para a obtenção de qualquer grau académico.

Maputo, Abril de 2019

Leonardo José Langa

Leonardo José Langa

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Este trabalho foi aprovado com 16 valores, no dia 22 de Abril de 2019 por nós, membros do júri, examinadores nomeados pela Faculdade de Economia, da Universidade Eduardo Mondlane.

**Membros do Júri**

Prof. Doutor Manoela Maharomy Sylvestre
Universidade Eduardo Mondlane
**(Presidente de júri)**

Profa. Doutora Maria Teresa Medeiros Garcia
Universidade de Lisboa
**(Arguente)**

José Silva Pereira

Prof. Doutor José Manuel da Silva Pereira
Universidade de Lisboa
**(Supervisor)**

iii

**DEDICATÓRIA**

*Aos meus pais, José e Maria,*
*pelo carinho e apoio.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me ter dado saúde, força e ânimo para o prosseguimento dos meus estudos.

Agradeço ao meu supervisor, Prof. Dr. José Manuel da Silva Pereira, pelo apoio, paciência, compreensão e encorajamento.

Aos funcionários e docentes da Faculdade de Economia da Universidade Eduardo Mondlane e do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa, do curso de Mestrado em Ciências Actuariais (2ª edição), o meu muito obrigado.

Aos meus colegas, Me. Eduardo Neves João, Ma. Marisa Alves, Ma. Gisela Sucá, Dra. Margarida Chongo, Dra. Elisa Malamba, Dra. Zainabo Adamo e Dra. Elca Mafumo, vão os meus sinceros agradecimentos pela colaboração.

Aos meus colegas do Mestrado, Dr. Nadimo Carimo, Dr. Mauro Langa, Dr. Dionísio Ussacas, Dra. Leonor Chambal, Dr. Danaldo Martins e Dr. Zacarias Maculuve, pelo apoio nos momentos difíceis que passámos ao longo do curso, vão os meus sinceros agradecimentos.

À Direçcão Geral do INSS, por ter viabilizado a disponibilização dos dados, para elaboração do presente trabalho, em especial, ao Dr. Emerson, Dra. Nuhuruda e Ma. Nádia, pelo apoio prestado, apresento os meus agradecimentos.

Aos meus irmãos, vão os meus sinceros agradecimentos pela compreensão, encorajamento e tolerância, mesmo nos momentos mais difíceis, muito obrigado por tudo.

Aos meus pastores locais, António e Ferrreira, e a todos os irmãos da Igreja, pelo conforto espiritual, vai o meu reconhecimento.

Aos meus amigos, Ozias, Noa, Jane e Alípio, em especial a minha namorada Olívia, pelo apoio em todos momentos da vida, o meu muito obrigado.

Por fim, a todos que de forma directa ou indirecta, contribuíram para que este sonho se concretizasse, vão os meus sinceros agradecimentos e reconhecimento.

# RESUMO

O objectivo do presente trabalho é mostrar a aplicabilidade da Programação Matématica, especificamente da programação linear, na optimização de uma carteira de investimentos, de modo que gere o maior rendimento esperado possível, utilizando-se a ferramenta *solver* do *Microsoft Office Excel*, aplicada a uma situação real. Para o efeito em concreto, foram determinadas as carteiras óptimas com base nos retndimentos observados no Instituto Nacional de Segurança Social, durante o ano de 2017. O trabalho limita-se à apresentação e análise deste modelo e não à comparação com outros modelos teóricos existentes. A partir dos dados foram desenhados três perfis de investidores (conservador, moderado e agressivo) para a simulação do problema em análise. Com a aplicação do modelo, obteve-se os seguintes rendimentos: 19.93% para o perfil conservador, 20.20% para o perfil moderado e 21.25% para o perfil agressivo. O perfil de investidor agressivo mostrou-se mais rentável, na medida em que superou os demais perfis, apesar de este apostar a maior parte dos investimentos em activos de médio e alto risco. Concluiu-se com o trabalho, que a programação linear pode servir como uma ferramenta auxiliar no processo de tomada de decisão na composição e formação de uma carteira de investimentos. A utilização desta ferramenta possibilita aos investidores que conhecem pouco a Moderna Teoria da Carteira aplicá-la na prática sem grandes dificuldades. Contudo, não isenta os investidores de avaliar outros factores macroeconómicos que afectam o mercado.



**Palavras-chave:** Programação linear: método *simplex*; Carteira de investimentos; Rendimento; Risco.

# *ABSTRAT*

The aim of the present work is to show the applicability of Mathematical Programming, specifically linear programming, in the optimization of an investment portfolio, so that it generates the highest expected performance possible, using the Microsoft Office Excel solver tool, applied to a situation. For this purpose, the optimum portfolios were determined based on the deficiencies observed in the National Social Security Institute during the year 2017. The work is limited to the presentation and analysis of this model and not to the comparison with other existing theoretical models. From the data, three investor profiles (conservative, moderate and aggressive) were designed to simulate the problem under analysis. With the application of the model, the following yields were obtained: 19.93% for the conservative profile, 20.20% for the moderate profile and 21.25% for the aggressive profile. The aggressive investor profile proved to be more profitable in that it outperformed the other profiles, despite the fact that it is investing most of the investments in medium and high-risk assets. It was concluded with the work that linear programming can serve as an auxiliary tool in the decision-making process in the composition and formation of an investment portfolio. The use of this tool enables investors with little knowledge of Modern Portfolio Theory to apply it in practice without major difficulties. However, it does not exempt investors from assessing other macroeconomic factors affecting the market.



**Keywords:** Linear programming: simplex method; Investment portfolio; Yield; Risk.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Forma padrão do problema primal e seu problema dual ................................ 14
Tabela 2. Rendimento da carteira no ano de 2017 ........................................................ 36
Tabela 3. Conta de reservas.............................................................................................. 41
Tabela 4. Composição da carteira e taxa de rendimento de cada activo no ano de 201743
Tabela 5. Resultados obtidos pelo solver da carteira optimizada para o perfil de investidor conservador, moderado e agressivo............................................................... 45
Tabela 6. Análise de sensibilidade do perfil conservador ............................................. 48
Tabela 7. Análise de sensibilidade do perfil moderado.................................................. 49
Tabela 8. Análise de sensibilidade do perfil agressivo................................................... 50

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Relação entre risco e rendimento ................................................................ 21
Gráfico 2. A redução de risco pela diversificação.......................................................... 25
Gráfico 3. Perfis de risco do investidor .......................................................................... 26
Gráfico 4. Relação entre risco e rendimento esperado de acordo com classes de activos ........................................................................................................................................ 28
Gráfico 5. Fronteira eficiente ......................................................................................... 30
Gráfico 6. Comparação do rendimento da carteira do perfil conservador, moderado e agressivo ....................................................................................................................... 47

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Janela de parâmetros do Solver no Microsoft Office Excel............................ 44
Figura 2. Janela de resultados do solver no Microsoft Office Excel para análise de sensibilidade ................................................................................................................. 48

## ANEXOS

Anexo 1: Modelo de programação liner para perfil conservador.................................. 62
Anexo 2. Modelo de programação liner para perfil moderado...................................... 63
Anexo 3. Modelo de programação liner para perfil agressivo ...................................... 64
Anexo 4. Relatórios Emitidos pelo Microsoft Office Excel -Solver - Perfil Conservador ........................................................................................................................................ 65
Anexo 5. Restrições - Perfil Conservador ..................................................................... 66
Anexo 6. Relatórios Emitidos pelo Microsoft Office Excel -Solver - Perfil Moderado 67
Anexo 7. Restrições - Perfil Moderado ......................................................................... 68
Anexo 8. Relatórios Emitidos pelo Microsoft Office Excel -Solver - Perfil Agressivo 69
Anexo 9. Restrições - Perfil Agressivo .......................................................................... 70

SUMÁRIO

**DECLARAÇÃO** ........ **iii**
**FOLHA DE APROVAÇÃO** ........ Error! Bookmark not defined.
**DEDICATÓRIA** ........ **iv**
**AGRADECIMENTOS** ........ **v**
**RESUMO** ........ **vi**
***ABSTRAT*** ........ **vii**
**LISTA DE TABELAS** ........ **viii**
**LISTA DE FIGURAS** ........ **viii**
**CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO** ........ **1**
1.1 Justificação ........ 2
1.2 Problema de pesquisa ........ 3
1.3 Objectivos ........ 4
1.3.1 Objectivo geral ........ 4
1.3.2 Objectivos específicos ........ 5
1.4 Estrutura da dissertação ........ 5
**CAPÍTULO II: ENQUADRAMENTO TEÓRICO** ........ **6**
2.1 Introdução ........ 6
2.1.1 Modelos de optimização ........ 6
2.1.2 O problema de programação linear ........ 8
2.1.3 Propriedades da programação linear ........ 11
2.1.4 Modelo de programação quadrática ........ 12
2.1.5 Programação linear inteira ........ 12
2.2 Teoria da dualidade ........ 13
2.3 Métodos de resolução ........ 15
2.3.1 Método *simplex* ........ 15
2.3.2 Método dos pontos interiores ........ 18
2.4 Relação risco e rendimento ........ 20
2.5 Rendimento de uma carteira de investimentos ........ 21
2.6 Risco de uma carteira de investimentos ........ 22
2.6.1 Redução do risco pela diversificação ........ 23
2.6.2 Perfis de risco do investidor ........ 25
2.6.3 Classes de activos em função do risco ........ 27
2.7 Teoria da Carteira de Markowitz ........ 29
2.7.1 Fronteira eficiente ........ 30
**CAPÍTULO III: METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO** ........ **34**
3.1 Fonte de dados ........ 34
3.2 Modelo de programação linear ........ 36

**CAPÍTULO IV: APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS ............ 40**
4.1 Breve Histórico do INSS ............ 40
4.1.1 Segurança Social para Assalariados ............ 40
4.1.2 Prestações concedidas pelo INSS ............ 40
4.2 Optimização aplicada a carteiras de investimentos ............ 43
4.2.1 Dados da composição da carteira de investimentos e dos rendimentos observados ............ 43
4.2.2 Resultados computacionais ............ 45
4.2.3 Análise gráfica dos perfis de investidores ............ 47
4.2.4 Análise de Sensibilidade ............ 47
**CAPÍTULO V: CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES ............ 52**
5.1 Conclusões ............ 52
5.2 Limitações ............ 53
5.3 Recomendações ............ 54
**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ............ 55**
**ANEXOS ............ 59**

# CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

Ao longo dos últimos anos têm sido realizados diversos estudos com o objectivo de testar a aplicabilidade da Programação Matemática, no caso particular da programação linear no auxílio à tomada de decisão na determinação da carteira óptima de investimentos.

Dentre os inúmeros problemas de programação linear que podem ser resolvidos através do *simplex*, a optimização de carteiras de investimentos vem ganhando relevância nos últimos tempos, com a adesão de investidores à utilização de técnicas científicas que visam aprimorar suas decisões.

O uso da Programação Matemática tem sido um instrumento facilitador para os mercados financeiros, devido a inovação e a complexidade que estes apresentam, ao utilizarem novos produtos financeiros, dando origem a uma maior necessidade de protecção contra riscos de diversa natureza, para uma melhor composição de uma carteira de investimentos.

Foi com base nos avanços no campo da pesquisa operacional e de trabalhos realizados por Markowitz (1952), que se marcou uma nova história nas finanças modernas. Este autor estudou a teoria de carteira que estabelece a relação entre risco e rendimento. Nele foi mostrado como criar uma fronteira eficiente de carteiras de investimentos, de forma que cada uma possuísse o maior rendimento esperado dado um certo nível de risco.

Um tipo específico de carteiras de investimentos são as das instituições de segurança social.

As instituições de segurança social são entidades que possuem património autónomo exclusivamente afecto à realização de prestações (planos de pensões, subsídio por doença, morte, funeral, internamento hospitalar, entre outros). Pela natureza das actividades, é necessário que estas entidades tenham uma política de investimento sólida, uma vez que recebem contribuições que futuramente devem ser transformadas em benefícios, daí que a aplicação não correcta dos investimentos representa um problema para os actuais beneficiários e para as gerações futuras.

Pretende-se com o presente trabalho mostrar a aplicabilidade da programação linear na optimização de uma carteira de investimentos, de modo que gere o maior rendimento esperado possível, dado um determinado nível de risco. Com efeito, a determinação será feita com base no método *simplex* do *Microsoft Office Excel*, limitando-se à apresentação e análise deste modelo e não à comparação com outros modelos teóricos existentes.

A metodologia adoptada para o desenvolvimento do trabalho é o Estudo de Caso, uma vez que, para a sua realização, foi necessário a disponibilização de documentos internos da instituição escolhida, que requer a apresentação dos dados da carteira de investimentos e os rendimentos observados ao longo do período em análise.

### 1.1 Justificação

Nas últimas duas décadas, devido ao surgimento de crises financeiras, a decisão sobre investimento tornou-se muito importante para as instituições financeiras e começou a atrair a atenção de investigadores, sociedade e Governos. Como resultado desta acção, a maior parte dos países encontra-se no processo da revisão e aprovação da regulamentação com vista a proteger os diferentes intervenientes do mercado.

Aliado ao facto do surgimento de crises financeiras, que culminou no encerramento de bancos, seguradoras, fundos de investimentos, empresas, as instituições encontram-se em situações de incerteza sobre a decisão de qual investimento fazer devido às diversas opções de investimento disponíveis e à complexidade dos produtos financeiros existentes no mercado.

Em cenário de incerteza, no qual as instituições estão inseridas, inúmeras ferramentas de diversas áreas da ciência têm sido utilizadas por especialistas para o auxílio na resolução de problemas de gestão. Em algumas destas situações, as decisões sobre a escolha de opções de investimentos baseiam-se no histórico e nos objetivos que as entidades pretendem alcançar ao longo da sua existência, o que de algum modo pode parecer adequado para a situação.

A selecção dos activos que compõem a carteira deve ser feita com base na relação risco e rendimento. Para auxiliar esse processo, modelos de optimização vêm sendo desenvolvidos, de modo a quantificar os níveis de risco e rendimento de investimentos.

A escolha do tema prende-se com o facto de os mercados financeiros serem inovadores e de as instituições sempre procurarem opções de investimentos que possam garantir a optimização dos activos em ambiente de incerteza, salvaguardando o risco.

O desenvolvimento da ferramenta justifica-se por ter sido provado ao longo do tempo que a programação linear constitui um instrumento importante no processo de apoio à tomada de decisão sobre a escolha da carteira óptima de investimentos nas instutuições.

O trabalho procura mostrar como os modelos de Programação Matemática, especificamente, a programação linear, auxiliam na tomada de decisão de investimentos em situações de incerteza e risco, face às diferentes oportunidades de investimento disponíveis no mercado.

### 1.2 Problema de pesquisa

A necessidade de os investidores possuírem ferramentas de auxílio na análise de investimentos é de extrema importância, uma vez que se encontram num ambiente de incerteza, o que implica o desenvolvimento de métodos de análise de tomada de decisão, para que os investidores consigam maximizar o rendimento e minimizar o risco dos investimentos.

As instituições encontrarem-se cada vez mais a competirem num ambiente complexo e instável, acentuado com o avanço da tecnologia, a que as mesmas estão expostas, existindo inúmeras oportunidades de investimento no mercado.

Um dos problemas que se apresenta em finanças, relacionado directamente ao problema financeiro de qualquer organização, refere-se ao facto de haverem oportunidades diversas de investimentos, ainda que a organização não possua capital para efectuar todo o investimento.

O problema consiste na identificação de estratégia de investimento por classes de activos (por exemplo, acções, obrigações, depósitos a prazo, entre outros produtos financeiros). Ora, a Programação Matemática pode ser usada para selecionar o *mix* óptimo de oportunidades que maximizará o rendimento, atendendo às condições estabelecidas pelo investidor.

Na realidade, o *mix* óptimo pode ser obtido se os rendimentos esperados forem estimados, e a seu lado a volatilidade de cada rendimento.

O'Hara e Janke (2004) argumentam que poucas carteiras de investimentos assentam numa sólida filosofia para a tomada de decisão, direccionada a objectivos de longo prazo. Segundo estes autores, a maioria das carteiras é formada por um conjunto de acções reunidas ao longo do tempo por motivos que pareciam convincentes na época da aquisição, mas que já não são relevantes.

Em épocas de pessimísmo (crise) do mercado, os investidores acabam vendendo acções quando deveriam estar comprando, o mesmo acontece na situação contrária. Quando o mercado está optimista, esses investidores são influenciados por boatos, ambição ou maus conselhos, e acabam por optar por práticas especulactivas, quando deveriam estar investindo por outros motivos.

Em muitas destas situações, é preciso que o investidor tenha características diferenciadoras em relação aos demais para alcançar melhor desempenho no mercado, sendo que um factor importante é o uso de ferramentas de apoio à tomada de decisão, como os modelos matemáticos de optimização. Neste contexto, a presente pesquisa procura responder à seguinte questão: seria a programação linear aplicável na optimização de carteiras de investimentos do sistema de Segurança Social, nomeadamente caso específico do Instituto Nacional de Segurança Social (INSS)?

## 1.3 Objectivos

### 1.3.1 Objectivo geral

A pesquisa tem como objectivo mostrar a aplicabilidade da programação linear na optimização de uma carteira de investimentos, de modo que gere o maior rendimento esperado possível. Pretende-se com a programação linear mostrar a relevância de agregar ferramentas com origem noutras áreas do conhecimento para melhorar o desempenho dos investidores e também como potencial ferramenta para auxílio no mercado.

### 1.3.2 Objectivos específicos

De maneira mais específica, constroem-se os seguintes objectivos: *(i)* Colectar os dados da composição da carteira de investimentos e os rendimentos observados no ano de 2017; *(ii)* Estruturar a função objectivo e as restrições do modelo de programação linear que irá propor em quais activos investir e quanto investir em cada um deles, de modo que maximize o rendimento da carteira, dadas as restrições do problema; e *(iii)* Comparar a composição da carteira optimizada do perfil de investidor conservador, moderado e agressivo do modelo de programação linear, por forma a analisar os resultados sugeridos na alocação dos activos.

## 1.4 Estrutura da dissertação

O presente trabalho é constituído por cinco capítulos. O **primeiro capítulo** apresenta a introdução, incluindo a justificação, o problema de estudo, os objectivos e a estrutura do trabalho. O **segundo capítulo**, de enquadramento teórico, apresenta, inicialmente, a revisão e análise da literatura disponível de algumas formas particulares de modelos de optimização (problema de programação linear, programação quadrática e programação linear inteira), da teoria de dualidade, e dos métodos de resolução. De seguida, apresenta-se a relação entre o risco e o rendimento de investimentos, e a Moderna Teoria da Carteira. O **terceiro capítulo** introduz os aspectos metodológicos, isto é, os procedimentos usados para o desenvolvimento do estudo e o modelo de programação linear em análise. O **quarto capítulo** compreende a apresentação, análise e discussão dos resultados sugeridos pelo modelo. Finalmente, é apresentada a síntese da dissertação, **conclusões, limitações** e **recomendações**, no quinto e **último capítulo**.

# CAPÍTULO II: ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo será, primeiramente, dedicado à revisão e análise da literatura disponível de algumas formas particulares de modelos de optimização (problema de programação linear, programação quadrática e programação linear inteira), da teoria de dualidade e dos métodos de resolução. De seguida, apresenta-se a relação entre o risco e o rendimento dos investimentos, e a Moderna Teoria da Carteira.

## 2.1 Introdução

A busca de uma solução mais adequada entre diversas soluções alternativas traz consigo os elementos de um problema de optimização para cada critério de avaliação das soluções alternativas, o qual nos permite dizer que uma solução é melhor que outra (objectivo ou subjectivo). A este critério de avaliação chamamos de função objectivo, que pretendemos optimizar. As soluções alternativas devem ser passíveis de execução indicando a presença de restrições que devem ser respeitadas.

A optimização de um problema em Programação Matemática pode assumir diversas formas, dependendo da natureza do problema em causa. Existem diversos métodos de resolução, bem como de processos de cálculo, dependendo da forma como o problema está estruturado.

### 2.1.1 Modelos de optimização

Em diversos problemas da actividade humana, podem ser obtidas várias ou possivelmente infinitas soluções. Num problema de optimização deseja-se obter o óptimo de uma função a qual denominamos função objectivo. Isto deve ser realizado através da determinação das variáveis que definem o sistema. Na maioria dos problemas encontraremos restrições impostas pelas leis físicas da natureza, leis políticas (legais), limitações de orçamento, entre outros.

Segundo Pires (2005), os modelos de optimização tentam expressar, em termos matemáticos, fenómenos *estáticos* ou *dinâmicos*, o objectivo de resolver um problema da melhor maneira de acordo com certas limitações. Os problemas *estáticos* são denominados por *determinísticos*. Nestes problemas, todos os componentes são conhecidos *a priori* e nenhuma aleatoriedade em sua ocorrência é admitida. Os problemas *dinâmicos* são denominados *estocásticos*, e seus elementos apresentam uma probabilidade de ocorrência numa determinada forma.

A optimização é o processo de procura de uma solução que forneça o máximo benefício segundo algum critério, ou seja, é a busca da melhor condição. A busca da condição óptima nem sempre é alcançada, embora o óptimo seja sempre uma meta. Às vezes, restrições económicas, de tempo, de recursos técnicos ou mesmo de falta de conhecimento limitam essa busca pelo óptimo.

Segundo Pereira e Luz (2010), em múltiplas áreas do conhecimento, diversos são os problemas que podem ser encontrados, como problemas de optimização. Estes problemas consistem na procura de uma solução que seja melhor de acordo com o objectivo estabelecido e que respeite as condicionantes existentes. Uma vez encontrada, a referida solução designa-se por solução óptima do problema em análise.

Alguns destes problemas, estudados em Programação Matemática, estão relacionados com a afectação de recursos escassos a utilizações alternativas, com o fim de atingir o objectivo estabelecido.

A Programação Matemática estuda a maximixação ou minimização de funções em problemas com ou sem restrições. Pereira e Luz (2010) definem que formalmente um problema de Programação Matemática consiste na determinação dos valores de $n$ variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ e tornam máximo ou mínimo o valor de uma certa função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dita função objectivo, estando as variáveis sujeitas a $p$ restrições, condições ou ligações $g_i(x_1, x_{2,\dots} x_n) \leq 0$, $(i = 1, 2, \dots, p)$. Esquematicamente escreve-se:

$$\text{Maximizar (ou min)} \quad f\left(x_1, x_{2,\dots} x_n\right) \tag{2.1}$$

$$\text{Sujeita a} \qquad g_i(x_1, x_{2,\dots} x_n) \leq (\geq)\; o, i = 1,2, \dots, p$$

Para um problema de Programação Matemática, dependendo do comportamento da função de optimização $f(x)$ e do como o conjunto é descrito, temos diferentes classes de problemas de optimização, para os quais uma variedade de métodos de resolução tem sido desenvolvida.

Ramalhete, Guerreiro e Magalhães (1984) têm uma opinião semelhante à referida por Oenning, Rodrigues, Cassel e Antunes Junior (2004) que o problema da programação linear é um caso particular de grande importância na Programação Matemática, pois serve como umas das técnicas mais desenvolvidas e mais utilizadas na investigação operacional.

As decisões de investimentos implicam a escolha de recursos e operações que visam rentabilizar esses recursos, isto é, a sua optimização. Assim, a programação linear poderá ser um excelente instrumento de apoio à decisão porque, o seu objectivo é optimizar a alocação e utilização de recursos.

Apresentam-se a seguir algumas formas particulares de problemas de Programação Matemática.

### 2.1.2 O problema de programação linear

Os problemas de pesquisa operacional existem desde longa data. Somente a partir da segunda grande guerra mundial, passaram a ser tratados numa abordagem organizada, na forma de uma disciplina ou área do conhecimento. Somente após o final da guerra que problemas civis passaram a ser estudados pela pesquisa operacional (Ravindran, Phillips & Solberg, 1987).

Segundo Passos (2009), a pesquisa operacional vem estruturar processos e a partir da modelagem matemática, encontrar de maneira sistémica, a melhor solução. Nesta perspectiva, caracterizado por procedimentos de cálculos baseados na execução repetida de operações relativamente simples, beneficiando-se do advento da computação, surge a programação linear.

Um problema de programação linear é caracterizado em Programação Matemática como um problema de optimização (isto é, busca pela melhor dentre as várias alternativas, utilizando um critério pré-estabelecido de optimização), com as seguintes características (Bronson & Naadimuthu, 1997):

*i.* O problema possui um conjunto de variáveis manipuláveis no procedimento de busca pelo óptimo, essas são as variáveis de decisão do problema;

*ii.* Uma função objectivo compõe o critério de optimização e, sendo escrita em termos das variáveis de decisão do problema. A função objectivo é uma função linear das variáveis de decisão, devendo ser maximizada ou minimizada;

*iii.* Os valores assumidos pelas variáveis de decisão devem satisfazer um conjunto de restrições, que compõem a região de soluções viáveis do problema; e

*iv.* As variáveis de decisão podem assumir valores pré-estabelcidos no domínio dos números reais (isto é, valores positivos).

Tavares, Oliveira, Themido e Correi (1996) definem a programação linear como um conjunto de técnicas que permitem resolver o problema de optimização onde tanto a função objectivo como as restrições são lineares. O seu principal objectivo é o planeamento de actividades para obter um resultado óptimo, ou seja, que permita atingir os resultados pretendidos.

Baillargeon (1996) define programação linear como sendo um instrumento matemático que possibilita a análise de diversos tipos de situações, levando à criação de uma função linear com algumas variáveis, denominada de função objectivo que visa a optimização, ou seja, a maximização ou minimização da situação em estudo.

Por sua vez, Medri e Yotsumoto (2009) definem a programação linear como um sistema organizado com auxílio de um modelo matemático, e através da resolução desse modelo, encontrar a melhor solução. É a optimização de determinado problema, através de um modelo, dadas as restrições nelas estabelecidas.

As restrições são as limitações das variáveis envolvidas no problema e são compostas por um conjunto de inequações lineares. Em outras palavras, as restrições são a relação entre as actividades realizadas e os produtos requeridos pela mesma levando em conta a disponibilidade desses recursos (Hillier & Lieberman, 2013).

A construção de um modelo de programação linear segue três passos básicos (Ravindran *et al.*, 1987):

*i.* **Passo 1:** Identificar as variáveis desconhecidas a serem determinadas (elas são denominadas variáveis de decisão) e representa-las através de símbolos algébricos ($x\ e\ y$ ou $x_1\ e\ x_2$);

*ii.* **Passo 2:** Alistar todas as restrições do problema e expresse-as como equações (=) ou inequações (≤, ≥) lineares em termos das variáveis de decisão definidas no passo anterior; e

*iii.* **Passo 3:** Identificar o objectivo ou critério de optimização do problema, representando-o como uma função linear das variáveis de decisão, sendo o objectivo de maximizar ou minimizar.

Segundo Pires (2005), um modelo de programação linear envolve a optimização de uma função linear sujeita a $m$ restrições lineares com $n$ variáveis, representado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar (ou min)} \quad & c_1x_1 + c_2x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{Sujeita a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ \geq b_2 \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ \geq b_m \\ & x_1, x_2, \ldots x_n \ \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Algumas características importantes do formato padrão são: (*i*) a função objectivo é do tipo *maximizar* ou *minimizar*; (*ii*) todas as restrições são expressas como equações; (*iii*) todas as variáveis são não-negativas e (*iv*) a constante no lado direito das restrições é não-negativa.

A $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ chama-se função objectivo. É costume representar esta função por $z$. Os valores $c_1, c_2, \ldots, c_n$, da-se o nome de custos e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis de decisão. As desigualdades representam a restrições. Os coeficientes $a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, são chamados coeficientes tecnológicos e formam uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ chamada matriz das restrições. O vector $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é chamado termo independente. As restrições $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ são chamadas restrições de não negatividade. A um vector $x = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T$ que satisfaz todas as restrições chama-se solução admissível. Ao conjunto de soluções admissíveis chama-se região admissível. Usando notação matricial, o problema (2.2) pode ser escrito abreviadamente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad && c^T x \\ &\text{Sujeita a} \quad && Ax \geq b \qquad (2.3) \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

Em que $A = \mathbb{R}^{mxn}(mxn)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^m$, são os parâmetros do problema e designamos $S$ a região admissível, isto é $S = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$. Em que:

*i.* **Hipótise 1.** Existem $m$ colunas de $A$ linearmente independentes, isto é, $A$ é igual a $m$.

*ii.* **Hipótise 2.** A região admissível $S$ é não vazia, isto é, $S \neq \emptyset$

### 2.1.3 Propriedades da programação linear

Para formulação de um problema de optimização, é necessário que várias condições se verifiquem, sendos as principais (Taha, 2008; Hill & Santos, 1999; Ramalhete *et al.*, 1984 e Hillier & Liebernman, 2006):

*i.* **Proporcionalidade:** em cada actividade, a quantidade de bens que entram e saem são sempre proporcionais ao nível da mesma, isto é, se por exemplo, for duplicado o nível duma actividade, ter-se-ão de duplicar todos os *inputs* sendo duplicados todos os *outputs*. Dada uma variável $x_j$ a sua contribuição para o custo $c_j x_j$ e a sua contribuição para a restrição $i$ é $a_{ij} x_j$. Neste caso, se o valor de $x_j$ passa, por exemplo, para o dobro, a sua contribuição também passará para o dobro;

*ii.* **Divisibilidade:** Significa que as variáveis de decisão podem assumir qualquer valor real, isto é, valores fraccionários (não inteiros) representam decisões viáveis.

*iii.* **Não negatividade:** significa que as variáveis de decisão podem assumir qualquer valor positivo de um dado intervalo e em alguns casos nulo;

*iv.* **Aditividade:** a soma das contribuições individuais das variáveis presentes no modelo deve representar a contribuição total das variáveis da função objectivo e restrições. A hipótese de aditividade implica que produtos podem ser produzidos independentemente;

*v.* **Linearidade da função objectivo:** estabelece que a contribuição marginal de cada actividade para o valor da função objectivo seja constante, ou seja, linear.

Esta hipótese indica que essa contribuição para a função económica é proporcional ao nível da actividade. A contribuição total é a soma das contribuições de todas as actividades; e

*vi.* **Certeza:** Os coeficientes $c_j, a_{ij}\ e\ b_j$ presentes no modelo são precisamente conhecidos sem qualquer factor probabilístico. Assume-se que eventuais incertezas quanto a estes coeficientes foram eliminadas e que dispõe-se de um modelo determinístico equivalente.

### 2.1.4 Modelo de programação quadrática

A programação quadrática consiste na minimização de uma função $f(x)$ quadrática sujeita a restrições lineares, sendo uma extensão da programação linear. Um problema de programação quadrática pode ser escrito na forma a seguir:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad && x^T \mathrm{Q} x + c^T x \\ &\text{Sujeita a} \quad && Ax \geq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Onde, $D \in \mathbb{R}^{m*n}, x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}\ e\ b \in \mathbb{R}^m$.

Na programação quadrática, as restrições são definidas por uma matriz $A$ $(m \times n)$ e por um vector $m$ dimensional $b$. As variáveis de decisão são denotadas pelo vector coluna $n$ dimensional $x$, como na programação linear (Carvalho, 2010).

Uma vez que a função objectivo é quadrática e convexa, para resolver o problema da programação quadrática, será necessário achar uma solução que satisfaça as condições de *Kuhn-Tucker* para o problema. Estas condições são necessárias e suficientes para a optimidade da solução encontrada, sendo possível implementar métodos baseados no *simplex* que resolvam este problema.

### 2.1.5 Programação linear inteira

Segundo Taha (2008), são programações lineares e formadas por uma função objectivo, em que algumas ou todas as variáveis estão restritas a valores inteiros (discretos). Considere-se o seguinte programação linear inteiro:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Sujeita a} \quad & \sum a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \ldots, m \qquad (2.5) \\
& x_j \geq 0 \\
& x_j \; inteiro \; j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Para resolver este problema, começa-se por considerar o problema linear que se obtém ignorando a útima restrição. A este novo problema chama-se programa relaxado. A resolução do programa linear inteiro passa pela resolução de vários programas lineares relaxados, sendo o método mais conhecido o *Branch-and-Bound*, também designado como método de pesquisa em árvore.

## 2.2 Teoria da dualidade

Segundo Hill e Santos (1999), na teoria da programação linear, cada problema pode ser visto de duas maneiras diferentes, o que resulta em dois tipos de problemas: *(i)* o problema *primal* e *(ii)* o problema *dual*, isto porque, apesar de formularmos um problema específico de programação linear e encontrarmos a solução óptima, há um outro problema que utilizando os mesmos dados conduz à mesma solução óptima, apesar de apresentá-los numa óptica contrária.

O problema *dual* é um problema de programação linear definido directa e sistematicamente de acordo com o problema de programação linear *primal* (ou original). Os dois problemas guardam uma relação tão estreita que a solução óptima de um problema fornece automaticamente a solucação óptima do outro (Taha, 2008).

Considerando, $A = \mathbb{R}^n$ como uma variável do problema, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, o problema *primal* for do tipo:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & z = c^T x \\
\text{Sujeita a} \quad & Ax \geq b \qquad (2.6) \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

o seu problema *dual* é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & w = b^T u \\
\text{Sujeita a} \quad & A^T u \leq c^T \qquad (2.7) \\
& u \geq 0
\end{aligned}
$$

Onde, $u \in \mathbb{R}^m$ a variável do problema *dual*, chamada variável *dual*.

O modelo *dual* pode ser formulado, utilizando-se os coeficientes do modelo *primal* correspondente. Uma vez que o modelo *primal* está na forma padrão, pode-se escrever o problema *dual* da seguinte forma:

*i.* Se o problema *dual* estiver na forma de minimização, o problema *primal* está na forma de maximização, ou inversamente;

*ii.* Os lados direitos nas restrições no problema *dual* são os coeficientes na função objectivo do problema *primal*; e

*iii.* Os coeficientes da restrição no problema *dual* são os coeficientes das variáveis de restrição no problema *primal*.

Pereira e Luz (2010) têm uma opinião semelhante à referida por Taha (2008) que de forma análoga se demonstra que a existência de solução óptima para o *dual* garante (com um pouco de cálculo adicional) a existência de solução óptima para o *primal* e que se verifica a igualidade entre os respectivos valores das funções objectivo.

O esquema abaixo sintetiza as descrições acima, sendo à esquerda o modelo *primal* e à direita o modelo *dual*:

**Tabela 1. Forma padrão do problema *primal* e seu problema *dual***

| ***Primal*** | ***Dual*** |
|---|---|
| Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$<br>Sujeita a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i$<br>Para $i = \{1,2,\dots,m\}\ e\ j = \{1,2,\dots,n\}$<br>$x_j \geq 0$ | Minimizar $w = \sum_{i=1}^{n} b_j\, \lambda_i$<br>Sujeita a $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_j \geq c_j$<br>Para $i = \{1,2,\dots,m\}\ e\ j = \{1,2,\dots,n\}$<br>$\lambda_j \geq 0$ |

**Fonte:** Hillier e Lieberman (2006)

Assim, percebe-se que os elementos da matriz coluna, do lado direito da restrição no modelo *primal*, fornecem os coeficientes da função objectivo do problema *dual*; os coeficientes da função objectivo no problema *primal* fornecem a matriz coluna, do lado direito da restrição no modelo *dual*; o sinal das restrições também se altera, ou seja, se o problema *primal* possui o sistema de equações com sinal de “menor que ou igual a que”, o modelo *dual*, para seu sistema de restrições, terá o sinal de “maior que ou igual a que”; os coeficientes de uma variável em um dos modelos são os coeficientes para uma equação de restrição no outro modelo; o número de variáveis no problema *dual* é igual ao número de restrições no problema *primal* e cada restrição no problema *dual* corresponde a cada variável no problema *primal*.

### 2.3 Métodos de resolução

Para resolver um problema de optimização, além dos algoritmos ditos evolucionários, existem diversos algoritmos de Programação Matemática que são definidos de acordo com as características da função objectivo e das restrições. Dois métodos são muito utilizados para resolver os problemas de programação linear, nomeadamente:

*i.* O método *simplex* proposto por Dantzig (1987) na forma padrão, traduz-se em algoritmos de resolução que podem ser na forma *primal*, *dual* ou *primal-dual*.

*ii.* Os métodos de *pontos interiores*, desenvolvidos por Karmarkar (1984). Estes algoritmos permitem resolver em tempo útil um problema de programação linear com um número muito elevado de variáveis e restrições.

#### 2.3.1 Método *simplex*

Segundo Bronson e Naadimuthu (2001), definem o método *simplex* como sendo um procedimento matricial que visa resolver problemas de programação linear expressos na sua forma padrão. Este método foi o primeiro a ser proposto para a resolução de problemas lineares e baseia-se nas propriedades dos conjuntos convexos em geral e dos poliedros em particular.

O método *simplex* é formado por um grupo de critérios para escolha de soluções básicas que melhora o desempenho do modelo e também um teste de optimização. Para isso, o problema deve apresentar uma solução base inicial. As soluções básicas subsequentes são calculadas com a troca de variáveis básicas por não básicas, gerando novas soluções. Os critérios para escolha de vectores e consequentemente das variáveis que entram e saem para a formação da nova base constituem o centro do *simplex* (Da Silva, Da Silva, Gonçalves & Murolo, 1998).

Segundo Hill e Santos (1999), o algoritmo *simplex* funciona da seguinte forma: depois de ser encontrada a solução possível inicial, o algoritmo de forma sistemática altera a solução inicial de tal maneira que, cada iteração, melhore o valor da função objectivo, ou, se não for possível, que fique na mesma.

O desenvolvimento dos cálculos do método *simplex* é facilitado pela imposição de dois requisitos às restrições do problema (Taha, 2008):

*i.* Todas as restrições (com excepção da não negatividade das variáveis) são equações cujos lados direitos são não negativos; e

*ii.* Todas as variáveis são não negativas.

Aqui, a finalidade primordial destes dois requisitos é padronizar e tornar mais eficientes os cálculos do método *simplex*. Considere-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^T x \\ \text{Sujeita a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

E seja $\bar{x}$ o ponto extremo correspondente a partição $A = [\,B\ N\,]$, ou seja $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0$ , correspondendo-lhe a função objectivo o valor $c^T\bar{x} = c_B^T B^{-1}b$.

Considerando que $x$ satisfaça $Ax = b$ e $x \geq 0$ e considera-se para $x$ a mesma partição do que para $\bar{x}$ : $B_{xB} + N_{xN} = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_{xN}$.

Calculando o valor da função objectivo em $x$, usando esta mesma pertição para $c$, virá: $c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}N_{xN}) + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)_{xN}$

Então, se $(c_N^T - c_B^T B^{-1}N) \geq 0$, como $x_N \geq 0$, será $c^T x = c^T\bar{x}$ e, por isso, $\bar{x}$ é um ponto extremo óptimo.

Caso contrário, isto é, se para algum $j > m$ for $c_j - c_B^T B^{-1}a_j < 0$ , $\bar{x}$ não é óptimo, pois é possível construir um outro elemento de $S$, onde o valor da função objectivo é menor do que em $\bar{x}$, do seguinte modo:

$$x = \bar{x} + \lambda d_j, com\ d_j = \begin{bmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix}\ e\ \lambda > 0 \qquad (2.9)$$

Calculemos o valor da função objectivo neste novo ponto $x$:

$$c^T x = c^T\bar{x} + \lambda\left(c_j - c_B^T B^{-1}a_j\right) \qquad (2.10)$$

Como $c_j$ - $c_B^T B^{-1} a_j < 0 \; e \; \lambda > 0$, então $c^T x \leq c^T$x̄.

Duas situações podem ocorrer:

$$\text{Caso 1: } y_j \; = \; B^{-1} a_j \leq 0$$

Neste caso $Ad_j \; = 0 \; e \; d_j > 0$. Então $x \; = \;$ x̄ $+ \lambda d_j \in S$. Portanto, $d_j$ é uma direcção extrema e o problema é limitado.

$$\text{Caso 2: } \exists_i : y_{ij} > 0$$

Seja $b = B^{-1} b$ e define-se $\lambda$ do seguinte modo:

$$\lambda = min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} : \; y_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m \right\} \qquad (2.11)$$

Então $x \; = \;$ x̄ $+ \lambda d_j$ tem, no máximo, $m$ componentes posetivos. Nestas condições é fácil demonstrar que as colunas de $A$ correspondente são linearmente independentes e $x$ é um ponto extremo para a função objectivo.

Em restrições ($\leq$), o lado direito pode ser considerado como uma representação do limite imposto à disponibilidade de um recurso, caso em que o lado esquerdo representaria a utilização desses recursos limitados pelas actividades (variáveis) do modelo. Assim, a diferença entre lado direito e o lado esquerdo da restrição ($\leq$) resultaria na quantidade de recurso não utilizada ou folga ($S_i$). Para converter uma desigualidade ($\leq$) em uma equação, uma variável de folga não negativa é adicionada ao lado esquerdo da restrição (Taha, 2008).

Os problemas de programação linear nos quais todas as retrições são ($\leq$) com lados direitos não negativos oferecem uma solução básica inicial viável conveniente na qual todas as variáveis são de folga, o que não acontece com modelos que envolvem restrições ($=$) e/ou ($\geq$).

Segundo Taha (2008), o procedimento para iniciar a resolução de problemas de programação linear mal comportados com restrições ($=$) e ($\geq$) é usar variáveis artificias que desempenham o papel de folgas na primeira interação e então descartá-las legalmente em interações posteriores. Se uma das características vistas não ocorrer, então, estamos perante os casos especiais do método s*implex*.

### 2.3.2 Método dos pontos interiores

O método de *pontos interiores* tem como característica gerar uma sequência de pontos no interior da região viável ou admissível que converge para a solução do problema. Outra propriedade importante deste algoritmo é que cada um dos pontos intermediários possui valores decrescentes da função objectivo, ou seja, se por algum motivo a convergência não for alcançad,a o ponto final é sempre viável.

Segundo Karmarkar (1984), o método de *pontos interiores* apresenta-se diferente do método *simplex*, uma vez que aqui é proibitivo caminhar pela fronteira do conjunto viável de um problema de programação linear. Os algoritmos de *pontos interiores* geram *pontos interiores* (pontos no primeiro ortante com coordenadas estritamente positivas) viáveis, "próximos à trajectória central", até obter uma solução aproximadamente óptima.

Estes algoritmos trabalham com a hipótese de que é dado um ponto interior viável inicial (próximo à trajectória central). Além disso, para se obter uma solução óptima, é necessário um procedimento chamado purificação, isto é, considera-se as soluções aproximadamente óptimas (Khachiyan, 1979). A análise de complexidade destes algoritmos, supõe-se que os dados iniciais são inteiros, conforme:

Hipótese: Os algoritmos de *pontos interiores* são *primais-duais*: passos curtos e preditor-corretor. Assim, supomos que $F^0$ é não vazio. Esta hipótese garante as condições de optimização para o problema *primal-dual* (Gonzaga, 1989).

Trajectória central: definimos a trajectória central perturbando o problema *primal-dual* (PD), a função:

$$\mu > 0 \mapsto \big(x(\mu), y(\mu), s(\mu)\big) \qquad (2.12)$$

Satisfazendo o problema pertubado,

$$(PD)_\mu \begin{array}{c} A_x = b \\ A^T y + s = c \\ xs = \mu e \\ xs \geq 0 \end{array} \qquad (2.13)$$

Onde, $e \in R^n$ é um vector unitário, denominada trajectória central.

A trajectória central é a curva formada pelos pontos centrais *primais-duais* associados a $\mu > 0$, cujo limite quando $\mu \rightarrow 0$ é uma solução óptima do problema *primal-dual*.

Medida de proximidade: Dado $\mu > 0$, queremos encontrar o par 0 $(x, s) \in F^0$ tal que $(x, s)/\mu = e$. A palavra "próximo à trajectória central" refere-se a alguma medida de proximidade que definimos agora:

$$(x, s, \mu) \in F^0 * R_{++} \mapsto \delta(x, s, \mu) = \left\| \frac{xs}{\mu} - e \right\| \qquad (2.14)$$

Desta forma, dado o parâmetro $\alpha \in (0,1)$, definimos a vizinhança da trajectória central por:

$$V(\alpha) = \{(\mathrm{x}, \mathrm{s}, \mu) \in \mathrm{F}^0 * R_{++}; \delta(\mathrm{x}, \mathrm{s}, \mu) \leq \alpha\} \qquad (2.15)$$

Passos curtos: o algoritmo de trajectória central de passos curtos, apesar de ineficiente na prática, caracteriza bem a ideia dos métodos de *pontos interiores*. Cada interação parte de um ponto interior viável na vizinhança da trajectória central (usualmente definida com $\alpha = 0.5$) e, então, calcula $\mu > 0$ reduzindo seu valor com relação à interação anterior e se aproxima do novo ponto central $\left(x(\mu), s(\mu)\right)$, através de um passo de Newton.

Preditor corretor: este algorítmo trabalha com duas vizinhanças da trajectória central. Cada iteração parte de um ponto interior viável na primeira vizinhança e, então, calcula uma direcção rápida, no sentido de tentar atingir directamente uma solução óptima e um tamanho de passo limitado pela segunda vizinhança obtendo um novo ponto: este é o passo preditor. Em seguida, após actualizar o parâmetro $\mu$, o algoritmo tenta atingir o novo ponto central obtendo, através de um passo de Newton, um novo ponto na primeira vizinhança, este é o passo corretor.

Neste trabalho só há interesse no método *simplex*, uma vez que é o mais utilizado para resolução de problemas de optimização linear, caso específico na determinação de carteiras de investimentos.

## 2.4 Relação risco e rendimento

No campo das finanças, um dos apectos que é levado em conta é a forma como devem ser relacionados dois componentes de extrema importância na avaliação de activos, o risco e rendimento. A mensuração desses dois componentes, é também uma das tarefas primordiais dos analistas do mercado e o resultado dessa mensuração é crucial na construção e formação de carteiras de activos (Alcântara, 1980).

A dificuldade em medir esses componentes, risco e rendimento pode ser entendida se imaginássemos um analista tentando delinear cada evento possível (por exemplo, preço de uma acção) e estimar a sua probabilidade de ocorrência e o efeito de cada um desses preços sobre as suas alternativas de investimento.

O risco e rendimento de um investimento estão intimamente ligados. Em geral, se o investimento tem elevado rendimento esperado, a tendência é que o risco seja também maior. Deste modo, ao analisar os activos para se criar uma carteira de activos, não se deve focar apenas nos rendimentos esperados.

Assaf Neto (2007) mostra que a relação entre o risco e rendimento é sensível aos interesses de cada investidor, sendo estes importante para o processo de tomada de decisão. Nessa perspectiva, cada investidor tem as suas próprias preferências e atitudes diante do nível de risco ou as suas preferências de rendimento.

Contudo, as estimativas do risco e do rendimento de um activo vão diferir de um analista para outro, na medida em que são estimativas subjectivas relativas ao futuro, havendo aasim um espaço enorme para discordância. As pessoas têm expectativas diferentes, seja do futuro da economia, seja do rendimento esperado de um activo no mercado. Além do mais, as previsões dos analistas vão-se alterando ao longo do tempo, à medida que recebem novas informações relevantes a respeito daquele activo (Alcântara, 1980).

O Gráfico 1 mostra a relação entre risco e rendimento esperado no que se refere a investimentos no mercado de capitais. Obviamente, se pretendermos rentabilizar o investimento de forma segura, o nosso ponto na recta, posicionar-se-á mais abaixo, o que equivalerá, obrigatoriamente, a um menor risco. Em contrapartida, se quisermos obter maior rendimento, deveremos obrigatoriamente buscar possibilidades de investimentos que, certamente nos activos que trarão maior risco. É possivel observar que a recta mostra que para cada nível de rendimento esperado, existe um risco proporcional a esse rendimento esperado.

**Gráfico 1. Relação entre risco e rendimento**


**Fonte:** Gotardelo (2007)

## 2.5 Rendimento de uma carteira de investimentos

Segundo Gitman (2004), o rendimento é tudo aquilo que um determinado investimento rendeu durante um determinado período, pode se calcular um rendimento de um activo isoladamente ou o rendimento de uma carteira de activos, em que neste último o rendimento esperado é definido pela média ponderada do rendimento de cada activo em relação a sua participação no total da carteira. O valor do rendimento da carteira é dado, pela seguinte fórmula:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i \qquad (2.16)$$

Sendo, $E(R_p)$: Taxa esperada de rendimento da carteira.

$w_i$: Percentagem a investir no activo $i$, em que $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$

$R_i$: Rendimento esperado de cada activo $i$.

$n$: Número de activos que compõem a carteira.

Já o rendimento esperado de uma carteira, com activos arriscados, é dado pela expressão abaixo:

$$E\left[R_p\right] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i] w_i \qquad (2.17)$$

## 2.6 Risco de uma carteira de investimentos

Segundo Pinho, Valente, Madaleno e Vieira (2011), estamos perante uma situação de risco quando existe a probabilidade de uma determinada situação ter um resultado que não é desejado. Para Gitman (2004), o risco é a possibilidade de perda financeira. O risco é usado como sinónimo de incerteza e refere-se a variabilidade dos rendimentos associados a um activo.

Por sua vez, Weston e Brigham (2000) consideram o risco como uma possibilidade de que algum acontecimento desfavorável venha a ocorrer, ou seja, é um perigo para o qual uma organização deve se prevenir. Portanto, o risco de um investimento está ligado à probabilidade de perda da rendibilidade da organização.

Na perspectiva de Securato (1996), o risco de um activo financeiro pode ser entendido como:

*i.* Probabilidade de fracasso: tendo sua maior aplicação nos casos em que se pode, de alguma forma, separar claramente sucessos e fracassos, é particularmente interessante quando os efeitos dos fracassos e sucessos são imediatos e decisivos, resultando, que o simplismo deste critério nem sempre é possível de ser aplicado e, em grande maioria dos casos, implica perdas de sensibilidade.

*ii.* Risco como desvio padrão: parte do príncipio de que dada uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória objectiva, a decisão será tomada com base na média da distribução e, portanto, a grande questão é saber se esta média é uma boa representação, ou não, da distribuição das probabilidades. Assim, ao tomar uma decisão levando em consideração o valor médio da distribuição, está se correndo o risco de que esta média não seja representativo da distribuição e, por definição, este é o desvio padrão da variável objectiva.

Estas medidas estão directamente relacionadas com os conceitos usados em finanças e na base do desenvolvimento da Moderna Teoria da Carteira proposta por Markowitz (1952), porém este autor ressalvava que a quantificação de risco dependia do tipo de função utilidade do investidor.

Para Assaf Neto (2014) o risco pode ser mensurado pela variabilidade dos rendimentos projectados em torno do rendimento esperado, isto é, pelo grau de dispersão dos rendimentos em relação à média. O desvio padrão é, portanto, a ferrramenta estatística usualmente adoptada para quantificar o risco de um activo.

Algebricamente, o desvio padrão das possíveis taxas de rendimento do activo $i$ $(R_i)$, a partir da taxa de rendimento esperado $E(R_i)$, numa carteira com $n$ activos é dada por:

$$\text{DP} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [\,R_i - E(R_i)]^2 w_i} \qquad (2.18)$$

É possível reduzir o desvio padrão do rendimento esperado, isto é, o risco de um investimento, quando o mesmo é feito sobre uma carteira com diferentes activos. Isso se dá pelo efeito de diversificação, que é a diminuição na volatilidade de um investimento por combinar diferentes tipos de activos, explicado pela covariância e correlação entre eles (Rattiner, 2001).

A outra forma de considerar o risco é tomar o segundo momento da distribuição dos rendimento, ou seja, a variância (V) é dada por:

$$V = \sum_{i=1}^{n} [\,R_i - E(R_i)]^2 w_i \qquad (2.19)$$

Importa realçar que esta ferramenta estatística ajuda o investir a decidir em quais os activos mais ou menos arriscados na carteira, pelo facto de que poder indicar alta ou baixa dispersão dos rendimentos esperados**.**

### 2.6.1 Redução do risco pela diversificação

Markowitz (1952) demonstrou que a diversificação na composição da carteira do investidor, entre os diferentes activos, pode apresentar maiores benefícios em comparação com carteiras formadas somente por um activo, em razão de que a diversificação pode reduzir o risco do investimento, em determinado nível de rendimento. Propôs assim o emprego de um modelo de optimização de risco e rendimento na seleção de carteiras.

Uma vez que o mercado financeiro é cheio de incerteza, é necessário trabalhar com medidas de risco, o que implica que, quanto maior a taxa de rendimento, maior é o risco do investimento.

Ao construir combinações de activos, o investidor consegue diversificar parte do risco, pois se aplicar num único activo as consequentes perdas ou ganhos deverão ser sentidos de acordo com o risco desse activo. Por outro lado, com uma carteira diversificada, o investidor consegue reduzir esse risco.

Segundo White, Sondhi e Fried (1998), a teoria da carteira sugere que a diversificação permite que os investidores eliminem o risco específico (não sistemático). E que num mercado eficiente, os investidores são compensados apenas pelo risco que não pode ser eliminado através da diversificação, que é o risco de mercado (sistemático), concluindo que este é que é verdadeiramente relevante.

Quando um investidor diversifica suas aplicações em diversos tipos, ele não está procurando maximizar seu rendimento ou riqueza, mas sim encontrar uma combinação entre o rendimento esperado e o risco, preferível a qualquer outra que lhe seja oferecida. Ao encontra-lá, o investidor terá maximizado a sua função de utilidade esperada (Markowitz, 1952).

De acordo com Mellagi e Ishikawa (2012) existem dois tipos de risco, segundo a literatura financeira tradicional, sendo:

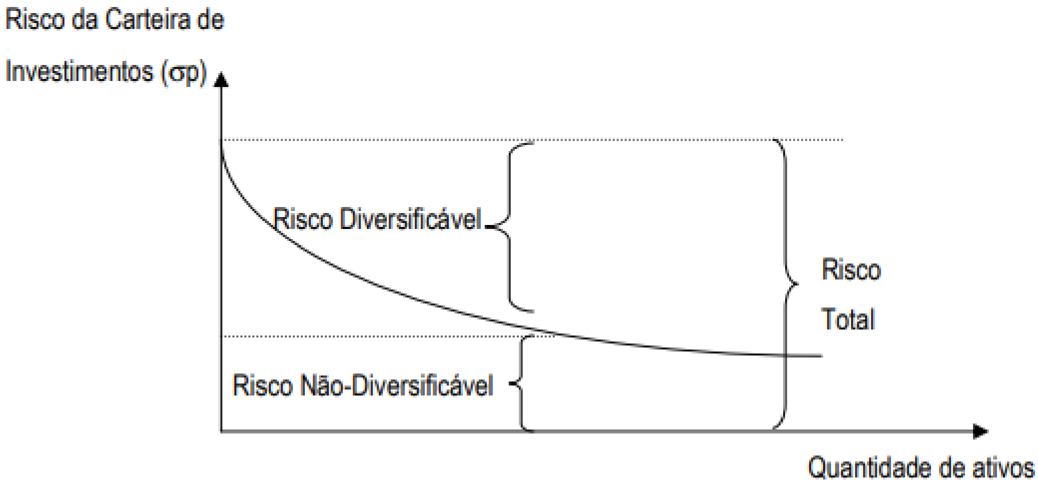
*i.* Risco não sistemático: risco relacionado ao próprio desempenho do investimento. Também chamado de risco diversificável, devido à possibilidade de sua diluição em uma carteira (ou seja, junto com outros investimentos).

*ii.* Risco sistemático: também chamado de risco não diversificável, risco de mercado e risco comum. A princípio, é um risco relacionado às condições macroeconómicas e está fora do controle do investidor individual, afectando todos os seguimentos económicos.

Por sua vez, Assaf Neto (2011) define o risco sistemático como inerente a todos os activos negociados em mercado, decorrente de eventos de natureza política, económica e social, e o risco não sistemático como aquele identificado nas características do próprio activo, não se alastrando para os demais activos da carteira.

O Gráfico 2 mostra que à medida que se aumenta o número de activos em uma carteira de investimentos, diminui o risco diversificável, por outro lado o risco não diversificável permanece constante.

**Gráfico 2. A redução de risco pela diversificação**




**Fonte:** Assaf Neto (2011)

### 2.6.2 Perfis de risco do investidor

Segundo Gitman (2004), as atitudes em relação ao risco diferem entre os administradores e as empresas. Por isso, é importante definir um nível geralmente aceitável de risco. Os três comportamentos básicos em relação ao risco são:

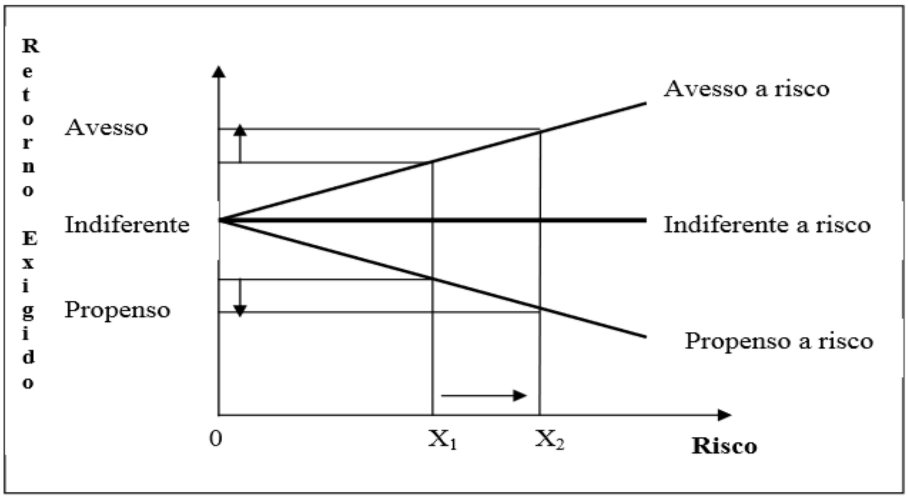
*i.* Administrador avesso a risco (*risk averse*): o rendimento exigido aumenta quando o risco se eleva. Este tipo de administrador tem medo de risco, exige um rendimento esperado mais alto para compensar o risco mais elevado.

*ii.* Administrador indiferente a risco (*risk seeking*): o rendimento exigido não varia quando o nível de risco passa para o outro estágio. Essencialmente, não haveria nenhuma variação de rendimento exigido em razão do aumento do risco. Essa atitude não faz sentido em quase nenhuma situação empresarial.

*iii.* Administrador propenso a risco (*risk prone*): o rendimento exigido cai se e o risco aumenta. Teoricamente, como gosta de correr riscos, esse tipo de administrador está disposto a abrir mão de algum rendimento para assumir maiores riscos. Entretanto, esse comportamento não tenderia a beneficiar a empresa.

O Gráfico 3 mostra o comportamento do investidor para as três situações relacionado ao risco em função do rendimento esperado.

**Gráfico 3. Perfis de risco do investidor**




**Fonte:** Gitman (2004)

O investidor que tem aversão ao risco exige um rendimento maior, demostrado na recta da aversão ao risco, uma recta ascendente. Os investidores indeferentes ao risco não se importam com o rendimento esperado, sendo uma linha pararela ao risco, aumenta-se o risco e o investidor mantém o mesmo resultado, verifica-se esta situação quando passa de $x_1$ para $x_2$, ocorre um aumento no valor do risco e o rendimento esperado permanece inalterado.

O investidor propenso ao risco, com tendências à situações arriscadas, tem menos receio às perdas, percebe se esta situação verificando no Gráfico 3 as mudanças de $x_1$ para $x_2$ no eixo do risco, no caso de investidor com tendência ao risco conforme aumenta o risco do $x_1$ para $x_2$ o rendimento esperado exigido diminui. Embora os investidores apresentem atitudes diferentes em relação ao risco, a observação do comportamento humano surge da predominância da aversão ao risco.

Halpern (2003) faz um alerta sobre a troca de um investimento seguro para um mais arriscado, afirmando que se a "expectativa de rendimento compensar o aumento no risco e/ou a diminuição na liquidez está incorrendo" vale a pena fazer a troca, caso contrário é melhor manter o investimento seguro. Isso porque nem sempre um investimento arriscado dará o rendimento esperado, podendo inclusive gerar perdas.

### 2.6.3 Classes de activos em função do risco

Segundo Assaf Net (2007), a seleção de activos é a decisão fundamental na gestão de uma carteira. Há inúmeros tipos de activos que podem compor uma carteira, podendo ser separados em diversas classes em função do risco apresentado:

**Classe 1 –Acções**

Uma acção é um título que representa uma fracção do capital social de uma empresa, constituida sob forma de uma sociedade anónima. O detentor destes titulos é o accionosta e a empresa é o emitente.

O rendimento total obtido com um investimento em acções depende não só da evolução da sua cotação, como também de outros eventos societários, como é o caso da distribuição de dividendos, aumento ou redução de capital, ofertas públicas de aquisição. Não devem ser descurados todos os custos envolvidos nas transações e detenção de acções.

**Classe 2 –Títulos privados de rendimento fixo**

Os títulos privados de rendimento fixo são títulos emitidos por instituições privadas que possuem remuneração paga em intervalos e condições pré-definidos. Existem diversas modalidades disponíveis no mercado, como títulos de captação bancária, agrícolas, crédito, mobiliários, valores imobiliários, entre outros, genericamente são obrigações.

**Classe 3 -Títulos públicos de renda fixa**

Os títulos públicos de renda fixa são títulos emitidos pelo Governo para financiar sua dívida, então quando se está comprando um título público, se está emprestando dinheiro para o Governo financiar seus gastos, como saúde, educação e segurança.

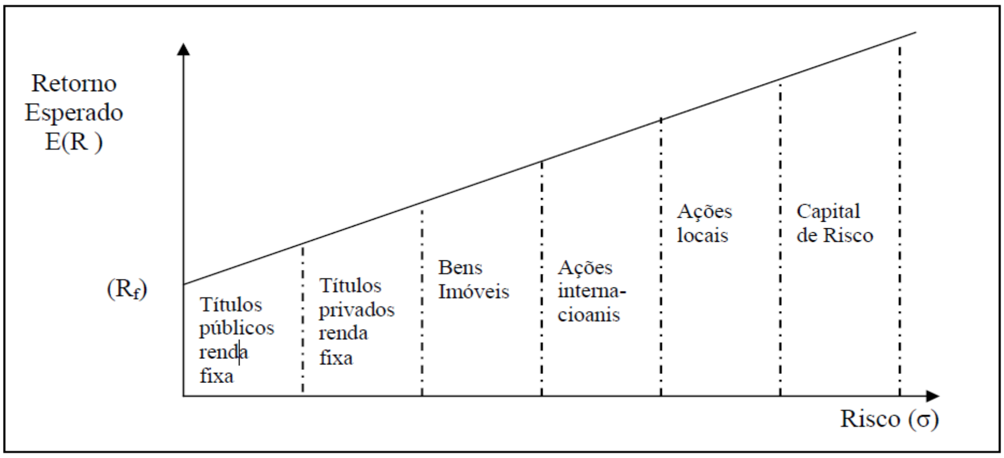
O rendimento dos títulos pode ser dimensionado no momento do investimento. Alguns desses títulos possuem baixíssima volatilidade, enquanto outros podem apresentar oscilações de preço ao longo do tempo. Isso porque o rendimento pode ser dimensionada de várias de formas, de acordo com o tipo de título.

**Classe 4 – Bens imóveis**

O investimento imobiliário é identificado como instrumentos de investimento colectivo, cujos recursos são captados no mercado e direcionados a aplicações em empreendimentos imobiliários (Assaf Neto, 2001). Os bens imóveis, podem ser representado por casas, prédios, escritórios, terrenos urbanos ou agrícolas, entre outros que se destinam a geração de um rendimento.

O Gráfico 4 mostra a relação entre o risco e rendimento nas diferentes classes de activos, onde é possível verificar que as classes com maior risco apresentam maior rendimento esperado, quando comparadas com as classes com rendimento baixo.

**Gráfico 4. Relação entre risco e rendimento esperado de acordo com classes de activos**




**Fonte**: Adaptado de Farrell (2002)

As acções e títulos de renda fixa são os activos de maior negociação, que compõem a maioria das carteiras do mercado. Os bens imóveis apresentam algumas características que limitam sua procura para investimentos, com menor liquidez no mercado, custo elevado de manutenção, e de dificuldades em avaliar seu risco e preço de mercado.

## 2.7 Teoria da Carteira de Markowitz

A Teoria da Carteira de Markowitz sugere que os investimentos devem considerar simultaneamente o risco e o rendimento numa alocação de fundos, através da diversificação de investimentos, de maneira a minimizar o risco e maximizar o rendimento.

Esta teoria é considerada um dos principais avanços, na teoria da carteira, pois através dela foi possível perceber que uma carteira óptima de investimentos não é simplesmente uma combinação de bons activos individuais, onde cada um deles tem características desejáveis de risco e rendimento (Ribeiro, 2016).

Segundo Bignotto e De Souza (1999), o objetivo desta teoria é a gestão de carteiras de investimentos, através da selecção de carteiras (chamados carteiras eficientes) que maximizem os rendimentos esperados, dado um nível de risco. Para a construção de uma carteira eficiente, supõe-se que o investidor seja avesso ao risco, ou seja, se há dois investimentos com o mesmo rendimento esperado, mas com riscos diferentes, o investidor prefere aquele com menor risco.

Segundo Sharpe, Alexander e Bailey (1995), as principais premissas adoptadas por Markowitz para a construção de sua teoria foram as seguintes:

*i.* Os investidores avaliariam carteiras apenas com base no valor esperado e na variância (ou desvio padrão) das taxas de rendimento sobre o horizonte de um período;

*ii.* Os investidores nunca estariam satisfeitos. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo rendimento, sempre escolheriam o de menor risco;

*iii.* Os activos individuais seriam infinitamente divisíveis, significando que um investidor poderia comprar a fracção de acção, se assim o desajasse;

*iv.* Existiria uma taxa livre de risco, na qual um investidor poderia, tanto emprestar, quanto tomar emprestado;

*v.* Custos de transação e impostos seriam irrelevantes; e

*vi.* Os investidores estariam de acordo quanto à distribuição de probabilidades das taxas de rendimento dos activos, o que assegura a existência de um único conjunto de carteiras eficientes.

Partindo destas premissas, Markowitz postulou que as variáveis que interessam ao investidor na seleção de uma carteira seriam o rendimento esperado (ou rendibilidade) e o risco (variância dos rendimentos).

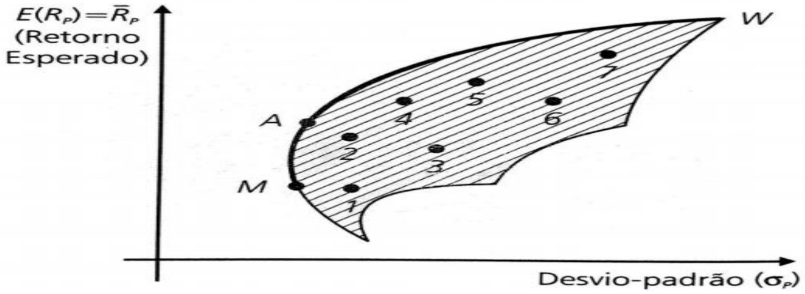
Para Markowitz (1952) o rendimento é o factor desejável pelo investidor e a variância o factor indesejável. Assim, as carteiras devem ter a menor variância possível e, para que isto ocorra, o investidor deve se valer da diversificação dos activos. Os investidores devem selecionar as carteiras não com base no desempenho individual dos activos, mas levando em consideração o desempenho da carteira de forma agregada. Ou seja, não basta apenas diversificar, é preciso que a diversificação leve em consideração a correlação entre os activos da carteira.

Segundo Markowitz (1952), o problema da composição de carteiras está intrinsecamente relacionado aos conceitos de risco e rendimento, ou seja, a composição de uma carteira de activos objectiva conseguir o máximo de rendimento possível, dado um nível aceitável de risco, ou obter o mínimo risco, fixado um nível de rendimento desejado.

### 2.7.1 Fronteira eficiente

A fronteira eficiente é o conjunto de carteiras cuja distribuição do peso dos activos apresenta, para cada patamar de risco, o melhor rendimento possível e, para cada patamar de rendimento, o menor risco possível. Ou seja, a fronteira eficiente é determinada pelo conjunto de carteiras cuja rendibilidade não pode ser mais incrementada sem que se aumente o risco, ou por outro lado, pelo conjunto de carteiras cujo risco não pode ser diminuído sem que se diminua o rendimento. No Gráfico 5 podemos ver a fronteira efeciente proposta por Markowitz que mostra a relação entre risco e rendimento para diferentes oportunidades de investimentos.

**Gráfico 5. Fronteira eficiente**




**Fonte:** Assaf Neto (2015)

A fronteira eficiente é o limite factível de combinações de maior benefício risco-rendimento, não havendo nenhuma outra combinação além dela. O investidor racional é aquele que vai optar pelas carteiras com o menor risco e o maior rendimento esperado dentro da curva **MW**. Estas carteiras são eficientes em comparação com as que se encontram dentro da área sombreada.

Segundo Assaf Neto (2015), ao comparar-se a carteira **A**, situada sobre a fronteira eficiente, com a carteira 2, localizada dentro da área sombreada, verifica-se que o risco de **A** é menor. Uma vez que as duas carteiras, tanto a carteira **A** quanto a carteira 2 apresentam o mesmo nível de rendimento. Ou seja, qualquer carteira que esteja a direita da curva **MW** possui maior risco para o mesmo rendimento ou até mesmo para menores rendimentos.

As carteiras posicionadas na fronteira eficiente são chamadas de carteiras eficientes. Macastropa (2006) define uma carteira eficiente quando nenhuma outra carteira oferece maior rendimento esperado para o mesmo (ou menor) risco. Da mesma forma, uma carteira é eficiente quando nenhuma outra carteira oferece o menor risco com o mesmo (ou maior) rendimento esperado.

As carteiras que estiverem fora da fronteira eficiente são chamadas de ineficientes, ou seja, carteiras cujo rendimento esperadopossa ser aumentado sem que tal facto resulte em incremento de risco e carteiras cujo risco possa ser diminuído sem que isto acarrete uma diminuição de rendimento esperado.

Por essa razão, nenhum investidor tem uma única curva de indiferença, mas várias, cada uma representando um conjunto de riscos e rendimentos esperados, todas são igualmente avaliadas e cada investidor irá aplicar naquela que lhe garanta a maior utilidade esperada.

Markowitz (1952) sugere que os investimentos devem considerar simultaneamente o risco e o rendimento esperado numa alocação de fundos, através da diversificação de investimentos, de maneira a minimizar o risco e maximizar o rendimento esperado.Nsamu (2017) demostra que este tipo de problema da relação do risco e rendimento esperado, pode ser visto como um problema de Programação Matemática da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && Risco \\ &\text{Sujeita a} && E[R_j] \geq \rho M_O \\ & && \sum_{j=1}^{n} X_j = \rho M_O \qquad (2.20) \\ & && X_j \geq 0, \; i = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

Sendo o rendimento esperado da carteira dado por:

$$r(x_{1,\dots,}x_n) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\, X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] X_j \qquad (2.21)$$

Tomando para medida de risco a variância do rendimento, o problema formula-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && Var\,[r_\varphi] \\ &\text{Sujeita a} && \sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] X_j \geq \rho M_O \qquad (2.22) \\ & && \sum_{j=1}^{n} X_j = M_O \\ & && X_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Onde,

$E[.]$: Valor esperado da variável aleatória a considerar entre parênteses;

$r_\varphi$: Rendimento associado ao risco

$R_j$: Variável aleatória, taxa de rendimento do título $j$;

$X_j$: Valor em unidades monetárias a investir no título $j$;

$M_O$: Fundo ou capital inicial disponibilizado;

$n$ : Número de activos disponíveis para investimento.

Além da variância, Markowitz ressalta a influência da covariância ($\sigma_{ij}$) entre os pares de activos $(i, j)$ no risco da carteira:

$$Cov = \sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{it} - E(R_i)\right)\left(R_{jt} - E\left(R_j\right)\right) \qquad (2.23)$$

Onde,

$\sigma_{ij}$: Covariância entre os rendimentos dos títulos $i$ $e$ $j$;

$E(R_i)$: Rendimento esperado do título $i$;

$E\left(R_j\right)$: Rendimento esperado do título $j$;

$R_{it}$: Variável aleatória, taxa de rendimento do título $i$;

$R_{jt}$:Variável aleatória, taxa de rendimento do título $j$.

# CAPÍTULO III: METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados os aspectos metodológicos necessários para desenvolvimento desta dissertação e o modelo de programação linear em análise.

## 3.1 Fonte de dados

No presente estudo foram utilizadas abordagens qualitativas e quantitativas. Considerando que o objectivo do trabalho é mostrar a aplicabilidade da programação linear na optimização de uma carteira de investimentos, de modo que gere o maior rendimento esperado possível. Para tal, pressupõe-se a existência de informação sobre a carteira de investimentos e os rendimentos observados ao longo do ano de 2017.

A análise foi feita utilizando só dados do ano de 2017, para que o modelo não incluísse memória dos anos passados e por isso só considera a volatilidade dos activos desse ano, através dos seus rendimentos anuais.

O trabalho enquadra-se dentro dos seguintes aspectos: quanto à natureza, trata-se de uma Pesquisa Aplicada; quanto à forma de abordagem, foi usado o Método Quantitativo; quanto aos objectivos, trata-se de uma Pesquisa Explicativa; quanto aos procedimentos técnicos é Estudo de Caso.

A primeira etapa do trabalho consistiu na construção da fundamentação teórica, por meio da revisão bibliográfica, que deu a sustentação na busca das questões formuladas. Num segundo momento, realizou-se a pesquisa documental, valendo-se dos documentos disponibilizados pela instituição para efeitos de levantamento de dados e tratamentento dos mesmos.

O Estudo de Caso realizou-se no INSS, a entidade responsável pela gestão das contribuições dos trabalhadores nacionais assalariados e estrangeiros residentes, bem como das respectivas entidades empregadoras no sistema de segurança social. Esta escolha deveu-se ao facto de ser umas das instituições que possui um volume de investimentos considerável em diversos sectores da actividade económica e pelo facto de ter sido possível o acesso a informação necessária para a realização do trabalho.

No processo de colecta de dados, fez-se pela consulta documental baseada nos relatórios, mapas de investimentos internos não acessíveis ao público e foram feitos contactos de esclarecimento junto do INSS, que permitiu a construção do modelo, definição das restrições e da função objectivo. E por conseguinte, os dados constituíram objecto de cálculo do rendimento de cada activo que compõe a carteira em termos percentuais, que serão usados para a simulação do problema de programação linear.

Assim sendo, o objecto de análise compreende quatro activos que compõem a carteira de investimentos para o período em referência, tendo em vista que esses activos se modificam periodicamente de acordo com as condições que o mercado oferece.

A variável de decisão foi quanto investir em cada activo e a função objectivo é a maximização do rendimento esperado da carteira, dadas as restrições estabelecidas.

Adicionalmente, foi feita a simulação do problema programação linear, por meio do método *simplex* da função *solver* do *Microsoft Office Excel*, a fim de se maximizar o rendimento esperado da carteira. Finalmente, fez-se uma comparação entre o rendimento esperado e a composição da solução encontrada pelo *solver* para os três perfis de investidor estudados, nomeadamende, conservador, moderado e agressivo.

### 3.2 Modelo de programação linear

O problema de programação linear em análise é composto por quatro activos, nomeadamente: depósitos a prazo, obrigações, participações financeiras (acções) e imobiliário, conforme a Tabela 2.

**Tabela 2. Rendimento da carteira no ano de 2017**

| Activos | | Taxa de Rendimento |
|---|---|---|
| **Depósito Prazo** | | |
| W1 | Standard Bank (STB) | 12,49% |
| W2 | Millennium BIM | 11,37% |
| W3 | Banco Comercial e de Investimentos (BCI) | 12,97% |
| W4 | First Rand National Bank (FNB) | 4,08% |
| W5 | Banco Mais | 7,54% |
| W6 | African Banking Corporation (ABC) | 1,49% |
| W7 | Eco Bank (Ex Banco ProCredit) | 23,32% |
| W8 | Moza Banco | 10,34% |
| W9 | Banco Único | 7,70% |
| W10 | Barclays | 7,71% |
| **Obrigações** | | |
| W11 | Obrigações da Companhia de Moc. 2013-2017 | 24,14% |
| W12 | Obrigações Petromoc 2015 – 2020 | 10,15% |
| W13 | Obrigações Petromoc II série 2016-2020 | 10,99% |
| W14 | Obrigações de Tesouro 2016 III série | 10,75% |
| W15 | Obrigações BNI 2016 | 17,60% |
| **Participações financeiras** | | |
| W16 | Banco Internacinal de Moçambique (BIM) | 35,08% |
| W17 | Cervejas de Moçambique (CDM) | 17,29% |
| W18 | Companhia Moçambique de Hidrocarbonetos (CMH) | 34,29% |
| **Imobiliário** | | |
| W19 | Edifício sede | 3,29% |
| W20 | Edifício de Chimoio | 16,17% |
| W21 | Edifício de Lichinga | 4,67% |
| W22 | Edifício de Namacha | 0,05% |
| W23 | Edifício Zambézia | 0,88% |
| W24 | Centro de Conferência Regional | 0,81% |
| W25 | Fabrica de Refeições de Maputo (FRM) | 5,36% |

**Fonte:** Do Autor

A Tabela 2 mostra os rendimentos observados no INSS ao longo do ano de 2017, nos diferentes produtos financeiros disponíveis no mercado Moçambicano. O desempenho da carteira foi condicionado pelas condições estruturais do mercado, como pouca dinâmica e oferta de produtos financeiros diversificados, de tal forma que, a carteira é predominantemente, constituída por depósitos a prazo. O imobiliário representa o segundo intrumento de eleição, seguido das obrigações e participações financeiras (acções) respectivamente

Os rendimentos apresentados na Tabela 2 serviram de base para a construção do modelo, isto é, a função objectivo e as restrições do problema de programação liner que será estudado.

O modelo considera uma escala de três classes de activos, sendo de baixo, médio e alto risco. A sua clasificação foi feita de acordo com a natureza do activo, as características inerentes e o comportamento do rendimento, no mercado Moçambicano. Dessa forma, os activos de baixo risco compreendem os depósitos a prazo e obrigações, por estes possuírem um rendimento fixo e que não varia tanto ao longo do tempo. Os activos de médio risco, representa o imobiliário, uma vez que este apresenta uma maior volatilidade no rendimento e dependem das condiçoes da procura do mercado. Os activos de alto risco envolvem as partcipações financeiras, acções, pois estes apresentam uma volatilidade alta, se comparados com os activos de rendimento fixo e principalmente por sofrerem influência de factores externos.

A partir desta classificação, determinou-se para cada perfil de investidor uma percentagem máxima a ser investida em cada classe de activos, sendo o total de investimento disponível para cada perfil de 100%, conforme a ditribuição:

*i.* Perfil conservador: 60% são activos de baixo risco, 25% são activos de médio risco e 15% são activos de alto risco;

*ii.* Perfil moderado: 45% são activos de baixo risco, 35% são activos de médio risco e 20% são activos de alto risco; e

*iii.* Perfil agressivo: 20% são activos de baixo risco, 35% são activos de médio risco e 45% são activos de alto risco.

No modelo criado, a função objectivo será a maximização do rendimento do investimento, que pode ser representada pela função:

$$\mathbf{Max.\,RT} = \mathrm{R_1W_1} + \mathrm{R_2W_2} + \cdots + \mathrm{R_nW_n} \qquad (3.1)$$

Onde: $RT$ é o rendimento total dos activos, $R_n$ representa o rendimento do activo $n$ observado no ano de 2017 e $W_n$ é a percentagem a ser aplicada no activo $n$.

A aplicação do modelo realizou-se para os três perfis, sendo a função objectivo a mesma para todos e as restrições alteradas consoante o perfil do investidor. Para exemplificar, é apresentado o perfil conervador.

A função objectivo é representado por:

$$\mathbf{Max.\,RT} = 12{,}49W_1 + 11,37W_2 + 12{,}97W_3 + 4{,}08W_4 + 7{,}54W_5 + 1{,}49W_6 + 23{,}32W_7 + 10{,}34W_8 + 7{,}70W_9 + 7{,}71W_{10} + 24{,}14W_{11} + 10{,}15W_{12} + 10{,}99W_{13} + 10{,}75W_{14} + 17{,}60W_{15} + 35{,}08W_{16} + 17{,}29W_{17} + 34{,}29W_{18} + 3{,}29W_{19} + 16{,}17W_{20} + 4{,}67W_{21} + 0{,}05W_{22} + 0{,}88W_{23} + 0{,}81W_{24} + 5{,}36W_{25} \quad (3.2)$$

**Sujeita as seguintes restrições:**

1) O modelo assume que, o total do investimento deve ser no máximo igual a 100%.

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{15} + W_{16} + W_{17} + W_{18} + W_{19} + W_{20} + W_{21} + W_{22} + W_{23} + W_{24} + W_{25} = 100\%$$

(3.3)

2) O investimento nos activos de baixo risco: $W_1$ a $W_{15}$, devem ser no máximo 60% para o perfil conservador; 45% para o perfil moderado e 20% para o perfil agressivo.

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{15} \leq 60\%$$

(3.4)

3) O investimento nos activos de médio risco: $W_{19}$ a $W_{25}$, devem ser no máximo 25% para o perfil conservador; 35% para o perfil moderado e 35% para o perfil agressivo.

$$W_{19} + W_{20} + W_{21} + W_{22} + W_{23} + W_{24} + W_{25} \leq 25\% \quad (3.5)$$

4) O investimento nos activos de alto risco: $W_{16}$ a $W_{18}$, devem ser no máximo 15% para o perfil conservador; 20% para o perfil moderado e 45% para o perfil agressivo.

$$W_{16} + W_{17} + W_{18} \leq 15\% \qquad (3.6)$$

5) Para se diversificar os riscos, estabeleceu-se que o total investido em cada activo não deve exceder a 15%.

$$W_1; W_2; W_3; W_4;\ W_5;\ W_6; W_7; W_8; W_9; W_{10}; W_{11}; W_{12}; W_{13}; W_{14}; W_{15}; W_{16};\ W_{17};\ W_{18};\ W_{19};$$

$$W_{20}; W_{21}; W_{22}; W_{23};\ W_{24}; W_{25} \leq 15\%$$

(3.7)

6) O investimento percentual em cada activo seja menor ou igual a 100%.

$$W_1; W_2; W_3; W_4;\ W_5;\ W_6; W_7; W_8; W_9; W_{10}; W_{11};\ W_{12}; W_{13}; W_{14}; W_{15}; W_{16};\ W_{17};\ W_{18};\ W_{19};$$

$$W_{20}; W_{21}; W_{22}; W_{23};\ W_{24}; W_{25}\ \leq 100\%$$

(3.8)

7) O investimento em cada activo deve-se presumir um modelo não negativo, ou seja, todos os activos devem ser maiores ou iguais a 0.

$$W_1; W_2; W_3; W_4;\ W_5;\ W_6; W_7; W_8; W_9; W_{10}; W_{11};\ W_{12}; W_{13}; W_{14}; W_{15}; W_{16};\ W_{17};\ W_{18};\ W_{19};$$

$$W_{20}; W_{21}; W_{22}; W_{23};\ W_{24}; W_{25} \geq 0$$

(3.9)

As percentagens devem variar entre 0 e 100, pois a primeira restrição garante que a soma do investimento é igual a 100. Como todos as percentagens são maiores ou iguais a zero pelas restrições de não-negatividade, isto obriga que cada variável seja no mínimo 0 e no máximo 100.

# CAPÍTULO IV: APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O presente capítulo está estruturado nos seguintes pontos: *(i)* em primeiro momento, fez-se um breve histórico da Segurança Social Obrigatório e *(ii)* em segundo momento, são apresentados e analisados os resultados obtidos após os procedimentos apresentados no capítulo anterior desta dissertação.

## 4.1 Breve Histórico do INSS

### 4.1.1 Segurança Social para Assalariados

O Sistema de Segurança Social, ora Segurança Social Obrigatória, foi criado no país pela Lei nº 5/89 de 18 de Setembro. Tornou-se clara a necessidade de se envidarem esforços no sentido de paulatinamente garantir-se a subsistência material dos trabalhadores nos casos de doença, velhice, diminuição das capacidades para o trabalho e sobrevivência dos seus familiares.

A Segurança Social Obrigatória, aprovada pelo Decreto nº 53/2007, de 3 de Dezembro no quadro da introdução da Lei de Protecção Social (Lei nº 4/2007, de 7 de Fevereiro) é gerida pelo INSS, uma instituição pública, dotada de personalidade jurídica, de autonomia administrativa e financeira e de património próprio, criado ao abrigo do Decreto nº 17/88 de 27 de Dezembro.

O INSS surgiu da necessidade que o Governo moçambicano teve de estender a protecção social para trabalhadores do sector público, privado e misto, saídos das empresas estatais, devido a implementação dos Programas de Reajustamento Estrutural (PRE). Diga-se que estes trabalhadores até então se encontravam cobertos pelo sistema de previdência social para funcionários do Estado, embora disso não tenham sido alguma vez informados.

### 4.1.2 Prestações concedidas pelo INSS

De acordo com a Lei da Segurança Social, é obrigatória a inscrição dos trabalhadores nacionais assalariados e estrangeiros residentes, bem como das respectivas entidades empregadoras no sistema de Segurança Social gerido pelo INSS. Tecnicamente, no INSS, a entidade empregadora é designada contribuinte e o trabalhador beneficiário.

O plano de contribuição, o qual abrange pessoas físicas com direito às prestações de pensões previstas. Trata-se de um plano de pensões contributivo de natureza mista, dado que os trabalhadores contribuem para o seu financiamento, a uma taxa de 3,0% e a entidade empregadora de 4% sobre as remunerações pensionáveis (salário base e adicionais) dos trabalhadores.

Para além das contribuições dos trabalhadores e das entidades empregadoras, este regime de Segurança Social poderá ser financiado pelas contribuições do Estado, doações, bem como através dos resultados dos seus investimentos. Deste modo, os juros e as reservas do INSS desempenham um papel importante no co-financiamento do sistema. A conta de reservas compreende as reservas técnicas e de capital, como ilustra a Tabela 3: A gestão de investimentos é apresentada em Anexo.

**Tabela 3. Conta de reservas**

| Descrição | Valores em Meticais |
|---|---|
| **1. Reservas Técnicas** | **31/12/2017** |
| Ramo doença | 443 111 985 |
| Ramo de prestação p/ morte | 1 004 379 034 |
| Ramo pensões | 7 178 126 284 |
| Reservas gerais de sistema | 11 190 714 300 |
| **Total Bruto** | **19 816 331 603** |
| **2. Reservas de Reavaliação de Imobilizado** | |
| Edíficios e outras construções | 43 027 629 |
| Equipamento industrial | -67 676 |
| Equipamento transporte | 530 923 |
| Excedente de revalorização | 1 640 765 716 |
| **Total** | **1 684 256 593** |
| **3. Total Líquido (1-2)** | **21 500 588 196** |

**Fonte:** INSS (2018)

O INSS tem a responsabilidade de gerir os regimes de Segurança Social Obrigatória e efectuar o reconhecimento dos direitos e cumprimento das respectivas obrigações, relativas ao pagamento de benefícios. Actualmente, o INSS atribui as seguintes prestações:

a) Subsídio por doença;
b) Subsídio por morte;
c) Subsídio de funeral;
d) Pensão de velhice;
e) Pensão de invalidez;

f) Pensão de sobrevivência;
g) Abono de velhice; e
h) Subsídio de internamento Hospitalar.

O INSS como gestor do Seguro Social Obrigatório depara-se com alguns constrangimentos, sendo um dos principais a dificuldade na colecta de contribuições e de fiscalização. Na verdade, não são todas as entidades empregadoras que canalizam as contribuições regularmente, por isso o INSS fica impedido de beneficiar muitos trabalhadores por estes não terem as contribuições em dia. O caso fica mais complicado quando o trabalhador sabe que foi descontado no seu salário e não se pode beneficiar das prestações quando se encontra em situação de risco (Quive, 2009).

### 4.2 Optimização aplicada a carteiras de investimentos

Nesta secção, serão apresentados os resultados obtidos a partir do modelo de programação linear em análise.

#### 4.2.1 Dados da composição da carteira de investimentos e dos rendimentos observados

Inicialmente, calcula-se o rendimento para cada activo e a respectiva distribuição de percentagens de investimento, conforme a Tabela 4

**Tabela 4. Composição da carteira e taxa de rendimento de cada activo no ano de 2017**

| Activos | | Composição da Carteira | Taxa de Rendimento |
|---|---|---|---|
| **Depósito Prazo** | | | |
| $W_1$ | Standard Bank (STB) | 3,61% | 12,49% |
| $W_2$ | Millennium BIM | 19,92% | 11,37% |
| $W_3$ | Banco Comercial e de Investimentos (BCI) | 29,35% | 12,97% |
| $W_4$ | First Rand National Bank (FNB) | 3,91% | 4,08% |
| $W_5$ | Banco Mais | 2,37% | 7,54% |
| $W_6$ | African Banking Corporation (ABC) | 0,45% | 1,49% |
| $W_7$ | Eco Bank (Ex Banco ProCredit) | 2,56% | 23,32% |
| $W_8$ | Moza Banco | 15,61% | 10,34% |
| $W_9$ | Banco Único | 3,85% | 7,70% |
| $W_{10}$ | Barclays | 1,81% | 7,71% |
| **Obrigações** | | | |
| $W_{11}$ | Obrigações da Companhia de Moc. 2013-2017 | 0,16% | 24,14% |
| $W_{12}$ | Obrigações Petromoc 2015 – 2020 | 2,24% | 10,15% |
| $W_{13}$ | Obrigações Petromoc II série 2016-2020 | 1,40% | 10,99% |
| $W_{14}$ | Obrigações de Tesouro 2016 III série | 2,23% | 10,75% |
| $W_{15}$ | Obrigações BNI 2016 | 3,20% | 17,60% |
| **Participações financeiras** | | | |
| $W_{16}$ | Banco Internacinal de Moçambique (BIM) | 1,43% | 35,08% |
| $W_{17}$ | Cervejas de Moçambique (CDM) | 1,04% | 17,29% |
| $W_{18}$ | Companhia Moçambique de Hidrocarbonetos (CMH) | 0,42% | 34,29% |
| **Imobiliário** | | | |
| $W_{19}$ | Edifício sede | 0,67% | 3,29% |
| $W_{20}$ | Edifício de Chimoio | 0,06% | 16,17% |
| $W_{21}$ | Edifício de Lichinga | 0,88% | 4,67% |
| $W_{22}$ | Edifício de Namacha | 0,41% | 0,05% |
| $W_{23}$ | Edifício Zambézia | 0,86% | 0,88% |
| $W_{24}$ | Centro de Conferência Regional | 1,38% | 0,81% |
| $W_{25}$ | Fábrica de Refeições de Maputo (FRM) | 0,18% | 5,36% |

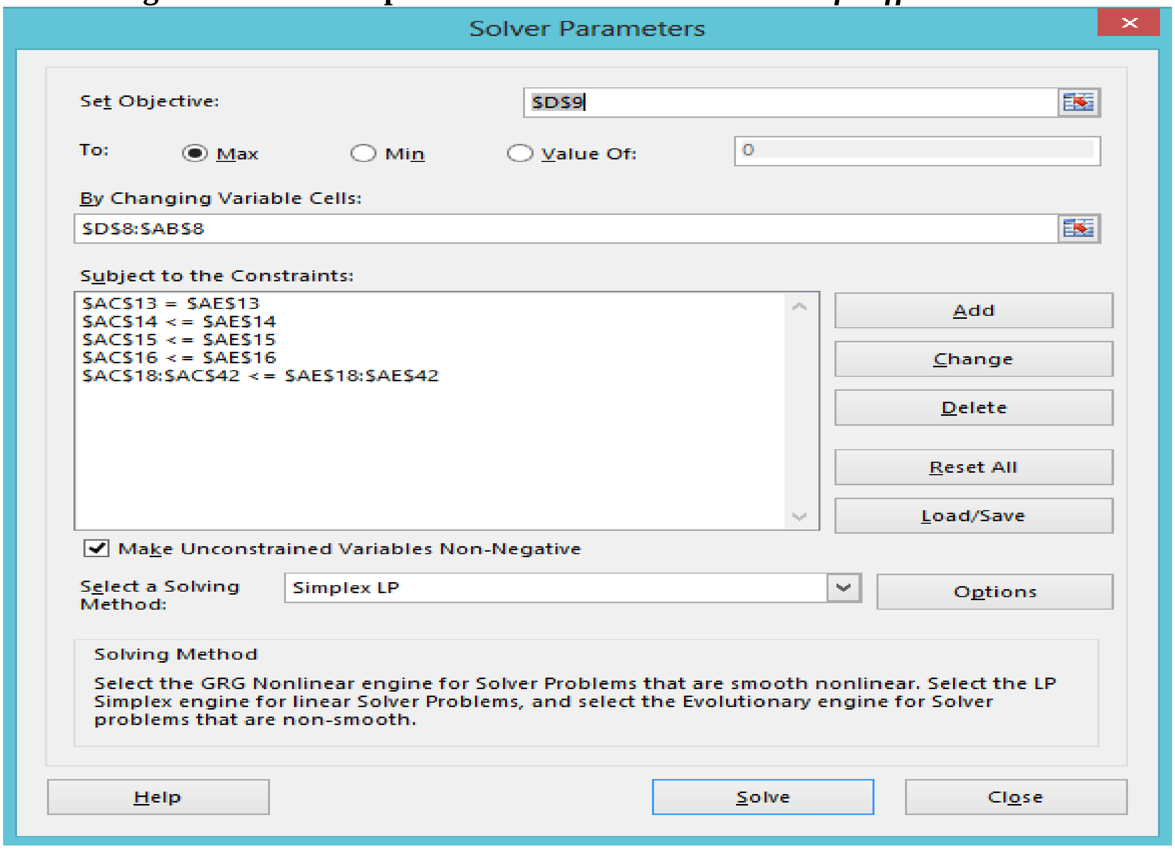
**Fonte:** Do Autor

Pelo *solver* do *Microsoft Office Excel*, localizado em Dados - *Solver*, ilustrado pela Figura 1, tem-se:

Selecionar a célula que representa o somatório do rendimento, no campo "Definir Objectivo";

- O problema é de "Maximização";
- Definir como células variáveis as percentagens de investimento, inicialmente distribuídos igualmente;
- Seleccionar as células que representam as restrições e colocar as suas condições, em "Sujeito às Restrições";
- Como o problema é de Programação Linear, selecionar *Simplex* LP, em "Método de Solução";
- Clicar em *Solver*.

**Figura 1. Janela de parâmetros do *Solver* no *Microsoft Office Excel***




**Fonte:** Do Autor

### 4.2.2 Resultados computacionais

Com a aplicação do modelo de programação linear obteve-se a Tabela 5, que mostra os resultados propostos, indicando em quais os activos e qual a percentagem que deve ser investida para o perfil de investidor conservador, moderado e agressivo.

**Tabela 5. Resultados obtidos pelo *solver* da carteira optimizada para o perfil de investidor conservador, moderado e agressivo**

| Activos | | Composição da Carteira | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Investidor Conservador | Investidor Moderado | Investidor Agressivo |
| **Depósito Prazo** | | | | |
| W1 | Standard Bank (STB) | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W2 | Millennium BIM | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W3 | Banco Comercial e de Investimentos (BCI) | 15,00% | 0,00% | 0,00% |
| W4 | First Rand National Bank (FNB) | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W5 | Banco Mais | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W6 | African Banking Corporation (ABC) | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W7 | Eco Bank (Ex Banco ProCredit) | 15,00% | 15,00% | 5,00% |
| W8 | Moza Banco | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W9 | Banco Único | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W10 | Barclays | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| **Obrigações** | | | | |
| W11 | Obrigações da Companhia de Moçambique 2013-2017 | 15,00% | 15,00% | 15,00% |
| W12 | Obrigações Petromoc 2015 – 2020 | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W13 | Obrigações Petromoc II série 2016-2020 | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W14 | Obrigações de Tesouro 2016 III série | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W15 | Obrigações BNI 2016 | 15,00% | 15,00% | 0,00% |
| **Participações** | | | | |
| W16 | Banco Internacinal de Moçambique (BIM) | 15,00% | 15,00% | 15,00% |
| W17 | Cervejas de Moçambique (CDM) | 0,00% | 0,00% | 15,00% |
| W18 | Companhia Moçambique de Hidrocarbonetos (CMH) | 0,00% | 5,00% | 15,00% |
| **Imobiliário** | | | | |
| W19 | Edifício sede | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W20 | Edifício de Chimoio | 15,00% | 15,00% | 15,00% |
| W21 | Edifício de Lichinga | 0,00% | 5,00% | 5,00% |
| W22 | Edifício de Namacha | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W23 | Edifício Zambézia | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W24 | Centro de Conferência Regional | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| W25 | Fábrica de Refeições de Maputo (FRM) | 10,00% | 15,00% | 15,00% |
| **Total** | | **100,00%** | **100,00%** | **100,00%** |

**Fonte:** Do Autor

A partir dos resultados obtidos na Tabela 5, o modelo direciona o investidor quanto ao processo de decisão, permitindo a este saber que tipos de investimentos se adequam para cada perfil. Este modelo seleciona os activos, buscando maximizar o rendimento da carteira de acordo com as restrições estabelecidas para cada perfil de investidor, com o objectivo de encontar a carteira óptima.

Na composição da carteira obtida com o perfil conservador, o modelo apontou como ideais os seguintes activos: $W_3, W_7, W_{11}, W_{15}, W_{16}, W_{20}$ e $W_{25}$, cuja combinação de aplicação varia de 10 à 15% do total de capital investido em cada um, tendo um rendimento da carteira de 19,93%. No perfil moderado, o modelo apontou como ideias os seguintes activos: $W_7, W_{11}, W_{15}, W_{16}, W_{18}$ $W_{20,} W_{21}$ e $W_{25}$, cuja combinação varia de 5% à 15% do total de capital investido em cada um, com o rendimento da carteira de 20.20%. No perfil de risco agressivo, o modelo tomou como activos: $W_7, W_{11}, W_{16}, W_{17}, W_{18}, W_{20,}$ $W_{21}$ e $W_{25}$, cuja combinação varia de 5 à 15% do total do capital investido em cada um, tendo o rendimento da carteira de 21.25%.

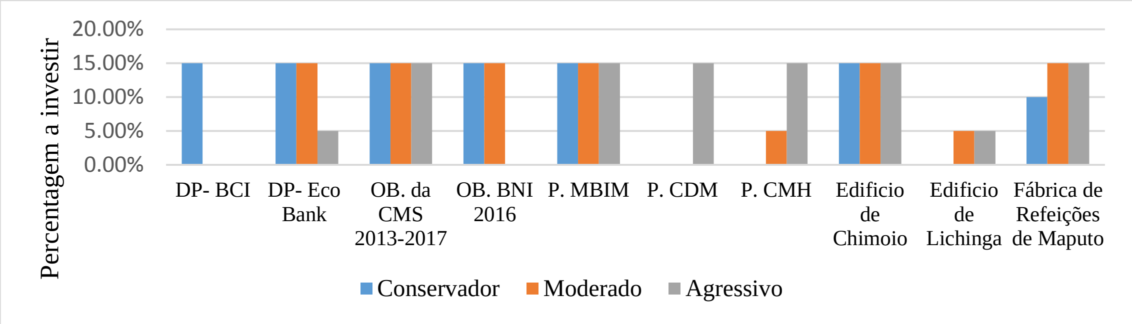
Com a aplicação da ferramenta *solver*, constatou-se que o perfil de investidor agressivo apresenta maior rendimento de 21.25% em relação aos demais perfis, isto mostra que o investimento em activos de alto risco proporciona maiores rendimentos, o que na realidade pode não acontecer, devido às condições que o mercado oferece. Percebe-se ainda que entre as carteiras formadas, a que se apresentou mais rentável é a do perfil agressivo, pois ele aceita correr maior risco para obter um rendimento mais alto.

Visto que o modelo tem como função objectivo a maximização do rendimento, este busca selecionar os activos de maior rendimento para cada perfil de investidor. Observou-se que os activos $W_7, W_{11}, W_{15}, W_{16}, W_{18}, W_{20}$ e $W_{25}$, foram selecionados para a formação das carteiras de investimento em todos os perfis, em razão de apresentar um maior rendimento teórico.

A partir da análise dos resultados é evidente que o modelo constitui uma ferramenta auxiliar e eficiente para dar suporte aos gestores no processo de tomada de decisão na avaliação das diferentes alternativas de investimentos disponíveis, com vista a encontrar a carteira óptima formada em cada perfil de investidor.

### 4.2.3 Análise gráfica dos perfis de investidores

**Gráfico 6. Comparação do rendimento da carteira do perfil conservador, moderado e agressivo**



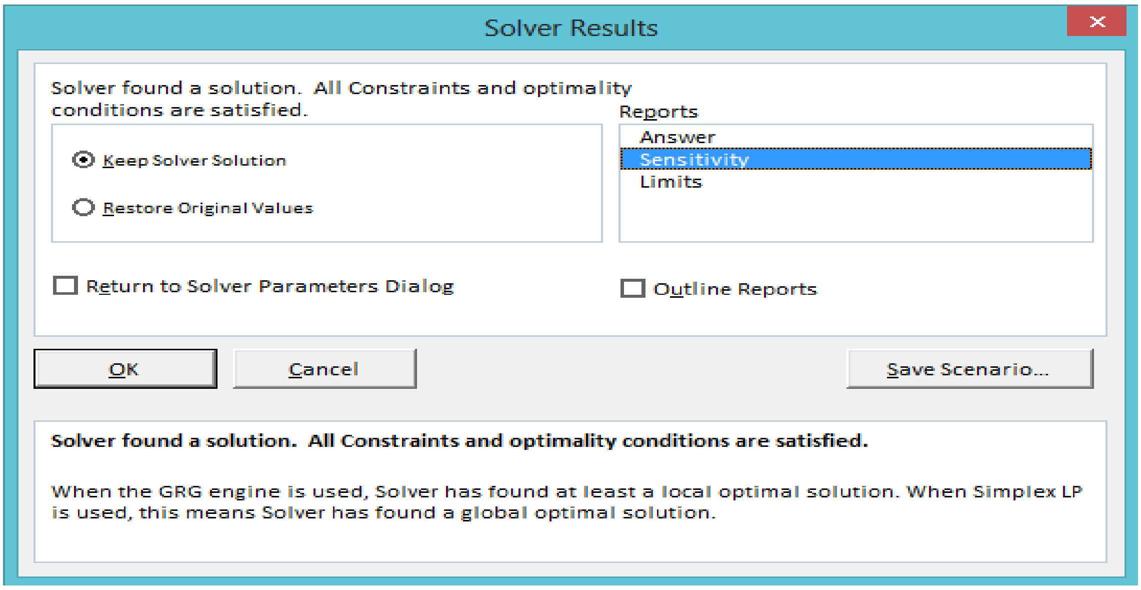

**Fonte:** Do Autor

É possivel observar no Gráfico 6 que na composição da carteira, as obrigações da Companhia Nacional de Hidrocabonetos (CMH) e do Banco Nacional de Investimento (BNI) apresentam a percentagem máxima a ser investido de 15% nos três perfis. Na composição dos depósitos a prazo o perfil conservador apresenta como ideiais os investimentos no BCI e Eco Bank no máximo de 15% para cada. O maior destaque vai para as participações financeiras do Millennium BIM que apresenta o máximo de 15% em todos os perfis de investidor. O investimento em edifícios mostra-se equilibrado na medida em que o modelo propõe investir no edifício de Chimoio e a Fábrica de Refeições de Ressano. Os resultados sugerem que o investimento mínimo a ser realizado é de 5% em depósitos a prazo, participações financeiras na CMH e no edificio de Lichinga. Por fim, vale ressaltar que o perfil conservador propõe um investimento de 15% na maior parte dos activos, excepto na fábrica de refeições de Maputo.

### 4.2.4 Análise de Sensibilidade

Uma das maneiras de se efectuar a análise de sensibilidade é utilizando o *Microsoft Office Excel*, a partir da tela de confirmação do *Solver*. Após clicar em “Resolver”, em ”Parâmetros do *Solver*”, abre-se a janela “Resultados do *Solver*”. Do lado direito dessa janela, encontra-se a opção “Relatórios – Sensibilidade”. Seleciona-se essa opcção e clica-se em *OK*, conforme mostra a Figura 2.

**Figura 2. Janela de resultados do *solver* no *Microsoft Office Excel* para análise de sensibilidade**




**Fonte:** Do Autor

**Tabela 6. Análise de sensibilidade do perfil conservador**

| Activo | Valor Final | Reducão do Risco |
|---|---|---|
| Composição óptima DP- STB | 0,00 | 0,00 |
| Composição óptima DP- MBIM | 0,00 | -0,01 |
| Composição óptima DP- BCI | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima DP- FNB | 0,00 | -0,08 |
| Composição óptima DP- B. Mais | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima DP- ABC | 0,00 | -0,11 |
| Composição óptima DP- Eco Bank | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima DP- Moza Banco | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima DP- B. Unico | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima DP- Barclays | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima OB. da CMS | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima OB. Petromoc | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima OB. Petromoc II | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima OB. de Tesouro 2016 III serie | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima OB. BNI 2016 | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima P. MBIM | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima P. CDM | 0,00 | -0,17 |
| Composição óptima P. CMH | 0,00 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio sede | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima Edificio de Chimoio | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio de Lichinga | 0,00 | -0,01 |
| Composição óptima Edificio de Namacha | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima Edificio Zambezia | 0,00 | -0,04 |
| Composição óptima Centro C. Regional | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima Fabrica de R. Maputo | 0,10 | 0,00 |

**Fonte:** Do Autor

A Tabela 6 mostra a sensibilidade dos resultados obtidos da redução de risco para o perfil de investidor conservador. Na sequência, temos o valor final que representa a composição da carteira após a optimização. A coluna Redução do Risco apresenta o valor que o coeficiente da função devia ser alterado para que o valor da variável seja diferente de zero, uma vez que trata-se de um problema de maximização. Neste caso, refere-se ao grau de impacto que uma unidade adicional de cada activo tem sobre a função objectivo. Por exemplo o valor de 0,1 encontrado no activo do MBIM significa que, caso estivesse disponível, uma unidade de depósitos a prazo no MBIM, diminuiria o risco da carteira em 0,1. Os outros activos possuem o valor de redução do risco igual a zero, pois nenhum deles melhoraria a função objectivo. No geral, para o perfil de investidor conservador, o modelo sugere uma redução de 0.77 do risco total da carteira.

**Tabela 7. Análise de sensibilidade do perfil moderado**

| Activo | Valor Final | Redução do Risco |
|---|---|---|
| Composição óptima DP- STB | 0,00 | 0,00 |
| Composição óptima DP- MBIM | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima DP- BCI | 0,00 | 0,00 |
| Composição óptima DP- FNB | 0,00 | -0,09 |
| Composição óptima DP- B. Mais | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima DP- ABC | 0,00 | -0,11 |
| Composição óptima DP- Eco Bank | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima DP- Moza Banco | 0,00 | -0,03 |
| Composição óptima DP- B. Unico | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima DP- Barclays | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima OB. da CMS | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima OB. Petromoc | 0,00 | -0,03 |
| Composição óptima OB. Petromoc II | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima OB. de Tesouro 2016 III serie | 0,00 | -0,02 |
| Composição óptima OB. BNI 2016 | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima P. MBIM | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima P. CDM | 0,00 | -0,17 |
| Composição óptima P. CMH | 0,05 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio sede | 0,00 | -0,01 |
| Composição óptima Edificio de Chimoio | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio de Lichinga | 0,05 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio de Namacha | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima Edificio Zambezia | 0,00 | -0,04 |
| Composição óptima Centro C. Regional | 0,00 | -0,04 |
| Composição óptima Fabrica de R. Maputo | 0,15 | 0,00 |

**Fonte:** Do Autor

A Tabela 7 mostra a sensibilidade dos resultados obtidos da redução do risco para o perfil de investidor moderado. Neste caso, refere-se ao grau de impacto que uma unidade adicional de cada activo tem sobre a função objectivo. Por exemplo, o valor de 0,17 encontrado no activo da CDM mostra que, caso estivesse disponível, uma unidade de depósitos a prazo no CDM, diminuiria o risco da carteira em 0,17. Os outros activos possuem o valor de redução do risco igual a zero, pois, nenhum deles melhoraria a função objectivo. No geral, para o perfil de investidor moderado o modelo sugere uma redução de 0,79 do risco total da carteira.

**Tabela 8. Análise de sensibilidade do perfil agressivo**

| Activo | Valor Final | Redução do Risco |
|---|---|---|
| Composição óptima DP- STB | 0,00 | -0,11 |
| Composição óptima DP- MBIM | 0,00 | -0,12 |
| Composição óptima DP- BCI | 0,00 | -0,10 |
| Composição óptima DP- FNB | 0,00 | -0,19 |
| Composição óptima DP- B. Mais | 0,00 | -0,16 |
| Composição óptima DP- ABC | 0,00 | -0,22 |
| Composição óptima DP- Eco Bank | 0,05 | 0,00 |
| Composição óptima DP- Moza Banco | 0,00 | -0,13 |
| Composição óptima DP- B. Unico | 0,00 | -0,16 |
| Composição óptima DP- Barclays | 0,00 | -0,16 |
| Composição óptima OB. da CMS | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima OB. Petromoc | 0,00 | -0,13 |
| Composição óptima OB. Petromoc II | 0,00 | -0,12 |
| Composição óptima OB. de Tesouro 2016 III serie | 0,00 | -0,13 |
| Composição óptima OB. BNI 2016 | 0,00 | -0,06 |
| Composição óptima P. MBIM | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima P. CDM | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima P. CMH | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio sede | 0,00 | -0,01 |
| Composição óptima Edificio de Chimoio | 0,15 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio de Lichinga | 0,05 | 0,00 |
| Composição óptima Edificio de Namacha | 0,00 | -0,05 |
| Composição óptima Edificio Zambezia | 0,00 | -0,04 |
| Composição óptima Centro C. Regional | 0,00 | -0,04 |
| Composição óptima Fabrica de R. Maputo | 0,15 | 0,00 |

**Fonte:** Do Autor

A Tabela 8 mostra a sensibilidade dos resultados obtidos da redução de risco para o perfil de investidor agressivo. Refere-se ao grau de impacto que uma unidade adicional de cada activo tem sob a função objectivo. Por exemplo, o valor de 0,22 encontrado no activo do ABC mostra que, caso estivesse disponível, uma unidade de depósitos a prazo no ABC, diminuiria o risco da carteira em 0,22. Os outros activos possuem o valor de redução do risco igual a zero, pois, nenhum deles melhoraria a função objectivo. No geral, para o perfil de investidor agressivo o modelo sugere uma redução de 1.92 do risco total da carteira, sendo este valor o maior observado na comparação dos três perfis analisados.

# CAPÍTULO V: CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do estudo, tendo em conta os resultados e a respectiva discussão, que foram apresentadas no capítulo anterior. Adicionalmente, são apresentadas também as limitações encontradas durante a elaboração desta dissertação e por fim, algumas recomendações para estudos futuros nesta área.

## 5.1 Conclusões

Sendo o objectivo do trabalho mostrar a aplicabilidade da programação linear na optimização de uma carteira de investimentos, de modo que gere o maior rendimento esperado possível, começou-se por fazer uma abordagem teórica e de seguida construiu-se o modelo matemático em análise.

A patir do enquadramento teórico, conclui-se que a programação linear é uma ferramenta que pode auxiliar aos investidores na tomada de decisão sobre a melhor forma de operacionalizarem as decisões de investimentos. Foi possível demostrar que a programação linear é aplicavel a teoria da carteira, na medida em que a aplicação da mesma gera carteiras eficientes. Através desta ferramenta é possível que os investidores que conhecem pouco a Moderna Teoria da Carteira possam aplicá-la na prática sem grandes dificuldades.

Vale ressaltar que na elaboração de um modelo de programação linear para análise e formação de carteiras investimentos, não se deve ter uma única fonte de escolha, por existirem outros factores, tanto do modelo, como do mercado real, que estão fora de controlo do investidor.

Após a aplicação da ferramenta *solver* para a composição e formação de carteiras de investimentos, constatou-se a eficiência da mesma, em virtude desta ferramenta ter superado o rendimento da carteira teórica para os três perfis de invertidores analisados, que era de 11.36%. Com o *solver* foi possível maximizar o rendimento da carteira, o que realça o potencial desta ferramenta no processo de escolha da carteira de investimentos.

Considerando os três perfis de investidores analisados, obteve-se os seguintes rendimentos, conservador com 19.93%, moderado com 20.20% e agressivo com 21.25%. Observa-se que o perfil de investidor agressivo regista o rendimento mais elevado, na medida em que superou os demais perfis, apesar de a maior parte dos investimentos ser em activos de médio e alto risco.

Conclui-se assim que a utilização da programação linear serve para mostrar ao gestor que estabelecer um objectivo de maior rendimento implica investir mais em activos de maior risco. No entanto, a instituição não deve olhar apenas para esse objectivo, dada a natureza da sua actividade que necessita de liquidez para cumprir com as suas responsabilidades (pagamento de pensões). Tem assim de fazer uma gestão do activo e do passivo.

Contudo, os objectivos estabelecidos no trabalho foram alcançados, visto que o modelo maximizou o rendimento da carteira dada às restrições estabelecidas, e permitiu evidenciar a relevância de agregar ferramentas com origem noutras áreas de conhecimento para melhorar o desempenho dos investidores, combinando a programação linear e finanças.

## 5.2 Limitações

O estudo apresenta algumas limitações que se prendem com o facto de se ter analisado apenas uma instituição, o que de alguma forma, condiciona as conclusões sobre eventuais obstáculos da aplicabilidade da programação linear nos diferentes ramos de negócios.

Por outro lado, o método de optimização de carteira tem sido criticado, pela incerteza em relação ao rendimento histórico, que pode não vir a acontecer no futuro, por factores de diversa natureza, tais como, as condições do mercado.

Outra limitação deste estudo está relacionada com o facto de a maior parte das instituições (por exemplo, as Sociedades Gestoras de Fundos de Pensões) recusarem-se a disponibilizar dados, alegando que são de carácter sigiloso.

Apesar das limitações identificadas, e de outras que podem ser apontadas, considera-se que o estudo realizado permitiu conhecer a composição da carteira de investimentos do INSS e testar a aplicabilidade da programação linear.

## 5.3 Recomendações

- Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a comparação dos resultados obtidos com a aplicação deste modelo, com os outros existentes, concretamente o *Capital Asset Pricing Model*;
- A necessidade de se fazer mais análises em termos temporais a outras entidades, como a diferentes Sociedades Gestoras de Fundos de Pensões;
- Analisar dados de um maior espaço de tempo, o que seria importante para aumentar a confiança dos resultados; e
- Por fim sugere-se também, a incorporação deste tipo de análise nos relatórios actuariais futuros para os activos financeiros da entidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Alcântara, J. C. G. (1980). O Modelo de avaliação de activos: capital asset pricing – aplicações. *Revista de Administração de Empresa*, *20* (3), 31-41.

Assaf Neto, A. (2015). *Mercado financeiro* (13a ed.). São Paulo: Atlas.

____________ (2014). *Finanças corporativas e valor*. São Paulo: Atlas.

____________ (2011). *Mercado financeiro* (9a ed.). São Paulo: Atlas.

____________ (2007). *Finanças corporativas e valor* (3a ed.). São Paulo: Atlas.

____________ (2001). *Estrutura e Análise de Balanços*. São Paulo: Atlas.

Baillargeon, G. (1996). Programmation lineárie appliquée: outil d'optimisation et d'aide à la decision. *Trois Rivères*: SMG.

Bignotto, E. C. & De Souza, Z. J. (1999). Teoria de portfólio: composição óptima de uma carteira de investimento. *Economia Pesquisa*, *1* (1), 61-78.

Bronson, R. & Naadimuthu, G. (1997). *Operations research* (2a ed.). NewYork: McGraw-Hill.

____________________________ (2001). *Investigação operacional* (2a ed.). Amadora: McGraw-Hill de Portugal, Lda.

Carvalho, S. M. S. (2010). *Métodos de pontos interiores aplicados ao pré-despacho com manobras simultâneas de barras e linhas.* Tese (Doutoramento em Engenharia Elétrica), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Da Silva, E. M., Silva, E. M., Gonçalves, V. & Murolo, A. C. (1998). *Pesquisa Operacional* (3a ed.). São Paulo: Editora Atlas.

Dantzig, G. (1987). *Systems optimization laboratory: origins of the simplex method*. Stanford University. California.

Farrell Jr, J. L. (2002). *Portfolio management* (2a ed.). NewYork: McGraw-Hill – Finance Series.

Gitman, L. (2004). *Princípios de administração financeira* (10a ed.). São Paulo: Pearson Addison Wesley.

Gonzaga, C. C. (1989). *Algoritmo de pontos interiores para programação linear*. 17º Colóquio Brasileiro de Matemática (Minicurso), IMPA/CNPq.

Gotardelo, D. (2007). *Apostila de administração financeira e orçamentária II*. Faculdade Estácio de Sá de Juiz de Fora (MG).

Halpern, M. (2003). *Gestão de investimentos: produtos, perfil e riscos*. São Paulo: Editora Saint Paul Institute of Finance.

Hill, M. & Santos, M. (1999). *Investigação operacional: programação linear* (Vol. 1). Lisboa: Edições Sílabo.

Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2006). *Introdução a pesquisa operacional.* São Paulo: McGraw – Hill.

____________________________ (2013). *Introdução a pesquisa operacional*. Porto Alegre: AMGH Editora.

Instituto Nacional de Segurança Social (2018): *Relatório & contas de 2017*. Disponível em https: <//www.inss.gov.mz/publicacoes/relatorio-e-contas/summary/8-relatorios-e-contas/66-relatorio-e-contas-2017.html> Acessado em 08 de Maio de 2019.

Karmarkar, N. (1984). *A new polynomial time algorithm for linear programming*. Combinatorica, 373-395.

Khachiyan, L. G. (1979). *A polynomial algorithm in linear programming*. Soviet Mathematics Doklady (Vol. 20), 191-194.

Macastropa, F. C. (2006). *A aplicabilidade da moderna teoria de portfólios em títulos de renda fixa internacionais*. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade de São Paulo.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77-91.

Medri, W. & Yotsumoto, A. S. (2009). *Pesquisa operacional na tomada de decisão: Apostila.* Curso de Especialização “Lato Sensu” em Engenharia de Produção com enfoque em Pesquisa Operacional, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil.

Mellagi Filho, A. & Ishikawa, S. (2012). *Mercado financeiro e de capitais* (2a ed.). São Paulo: Atlas.

Nsamu, B. (2017). *Modelos de optimização na determinação de carteiras de investimento*. Dissertação (Mestrado em Engenhária Matemática.), Universidade de Porto, Porto, Portugal.

O'hara, T. & Janke, K. (2004). *Como constituir e administrar um clube de investimento rentável*. Rio de Janeiro: INI.

Oenning, V., Rodrigues, L., Cassel, R. A. & Antunes Junior, J. (2004). *Teoria das retrições e programação linear: uma análise sobre o enfoque da optimização da produção*. XXIV Encontro Nac. de Eng. de Produção, Florianópolis, Brasil.

Quive, S. (2009). Sistemas formais e informais de protecção social desenvolvimento em Moçambique [Conference Paper Nº 43]. *II Conferência IESE: Dinâmicas da Pobreza e Padrões de Acumulação Económica em Moçambique*. Disponível em: < https://www.iese.ac.mz/>. Acessado em 09 de Outubro de 2018.

Passos, A. N. (2009). *Estudos em programação linear*. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Pereira, A. & Luz, C. (2010). *Programação linear: apontamentos de investigação operacional*. Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal, Portugal.

Pinho, C., Valente, R., Madaleno, M. & Vieira, E. (2011). *Risco financeiro: medidas e gestão*. Lisboa: Edição Silaba.

Pires, M. (2005). *Apontamentos de programação matemática*. Universidade do Algarve. Algarve, Portugal.

Ramalhete, M., Guerreiro, J. & Magalhães, A. (1984). *Programação linear* (Vol. 1). Amadora: McGraw-Hill.

Rattiner, J. (2001). Creatin a socialty niche by knowing the rules. *Financial Planning Magazine*, NewYork.

Ravindran, A., Phillips, D.T. & Solberg, J. (1987). *Operations research, principles and practice* (2a ed.). New York: John Wiley.

Ribeiro, W. (2016). *Teoria de Markowitz (teoria da carteira) e a fronteira eficiente.* Disponível em: <http://www.prateswr.com>. Acessado em 22 de Agosto de 2018.

Securato, J. R. (1996). *Decisões financeiras em condições de risco*. São Paulo: Atlas.

Sharpe, W. F., Alexander, G. J. & Bailey, J. V. (1995). *Investments* (5a ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Taha, H. *(2008). Pesquisa operacional* (8a ed.). São Paulo: Pearson.

Tavares, L.V., Oliveira, R.C., Themido, I. & Correi, F. N. (1996). *Investigação operacional*. Lisboa: McGraw-Hill.

Weston, J. F. & Brighan, E. F. (2000). *Fundamentos da administração financeira* (10a ed.). São Paulo: Atlas.

White, G. I., Sondhi, A. C. & Fried, D. (1998). *The analysis and use of financial statements* (2a ed.). NewYork: John Wiley & Sons.

*Decreto nº. 17, de 27 de Dezembro de 1988* (1988). Cria o Instituto Nacional de Segurança Social. Boletim da República. Moçambique. 27 Dez. 1988.

*Decreto nº. 53, de 3 de Dezembro 2007* (2007). Regulamento da segurança social obrigatória. Boletim da República. Moçambique. 3 Dez. 2007.

*Lei n.º 5, de 18 de Setembro de 1989* (1989). Lei da segurança social. Boletim da República. Moçambique. 18 Set. 1989.

*Lei nº.4,. de 7 de Fevereiro de 2007* (2007). Define as bases em que assenta a protecção social e organiza o respectivo sistema. Boletim da República. Moçambique. 7 Fev. 2007.

# ANEXOS

## Organização Administrativa do INSS

A este instituto, cabe a responsabilidade de gerir e administrar o seguro social obrigatório para o grupo de trabalhadores acima mencionados. Mas os beneficiários que, por alguma razão, perdem o poder de contribuir através das empresas, têm, de acordo com a lei 5/89 de 18 de Setembro, a possibilidade de inscrever-se no INSS de forma voluntária.

Desde o início que a administração do INSS tem um carácter tripartido e dela fazem parte: representantes do Estado, representantes dos empregadores e representantes dos trabalhadores. Para a implementação da segurança social o INSS, possui uma direcção executiva, denominada, Direcção Geral, dotada de autonomia financeira e administrativa.

Os funcionários do INSS regem-se pelo Estatuto Geral dos Funcionários e Agentes do Estado e são efectivamente funcionários do Estado ao serviço do INSS. Isto implica que sejam assegurados, na verdade, pelos serviços de previdência social para os funcionários do Estado e pelo facto de estarem a trabalhar para INSS, têm uma série de outras regalias sociais. É um dos poucos casos em que o funcionário é duplamente beneficiado e o Estado cobre as despesas inerentes com toda a naturalidade.

## Gestão de Investimentos

A gestão financeira da instituição é orientada de acordo com as normas e princípios gerais da política de investimento do INSS, que têm por objectivo: *(i)* garantir a rendibilidade da instituição, com o intuito de preservar o seu valor; *(ii)* assegurar a manutenção de um adequado grau de liquidez, que permita fazer face às responsabilidades com o valor das prestações em pagamento; *(iii)* mitigar os riscos a que estão sujeitos os activos da instituição e *(iv)* obter rendimentos razoáveis dos capitais investidos, correndo o menor risco possível.

Deste modo, são efectuadas análises periódicas da carteira dos activos, para determinar o valor nominal, o risco ponderado, a inflação estimada e as taxas de rendimento. As referidas análises incluem comparações com taxas de rendimento, estratégia de atribuição de activos, realizar ajustamentos se forem oportunos, com as referências à política e estratégia de investimentos, para permitir avaliar a performance dos investimentos.

É neste contexto que, o Decreto nº 53/2007, de 3 de Dezembro, que aprova o Regulamento de Segurança Social Obrigatória, preceitua no nº 2 do artigo 106 que os valores monetários do INSS só podem ser aplicados em títulos do Estado, imóveis para instalações administrativas ou de rendimento, construção de habitações económicas, investimentos de carácter social, acções, obrigações de empresas cotadas na bolsa de valores e participações em sociedades financeiras.

Em 31 de Dezembro de 2017, a carteira de activos é predominantemente, constituída por depósitos a prazo com peso de 83,44% como resultado de pouca oferta de produtos financeiros diversificados. As obrigações constituem um instrumento cuja performance está altamente correlacionada com as principais taxas de juro do mercado monetário, com peso de 9,23%. Os investimentos em imobiliário representavam 4.44% e as participações financeiras eram de 2,89% da carteira do total da carteira. Estes activos modificam-se periodicamente de acordo com as responsabilidades (pensões) e as condições que o mercado oferece.

Num contexto de mercado onde não há inovações no que tange a produtos financeiros, a aposta dominante na decisão de investimentos são os instrumentos de rendimento fixo, nomeadamente, os depósitos a prazo. Os depósitos a prazo são os activos de maior eleição, porque oferecem remuneração mais atractiva e menor exposição ao risco das taxas de juro (se comparados com as obrigações). Estão distribuídos pelos maires bancos do mercado.

A subida das taxas de juro, nos últimos anos, incentivou o investimento em obrigações, sendo este instrumento financeiro o segundo de maior eleição da carteira de activos, representada por emitentes privados e públicos.

A carteira do imobiliário é constituído por fracções em edifícios destinados exclusivamente ao arrendamento para escritórios, estacionamentos e arrumos. Estas unidades estão localizadas em todo o país, sendo a maior parte na cidade do Maputo, esta rúbrica mostra uma evolução, como resultado do crescimento deste sector no país, por essa razão a instituição tem apostado nestes activos.

As participações financeiras representam a menor proporção da carteira global, ela é constituda por empresas cotadas na Bolsa de Valores de Moçambique, o fraco investiemto nesta rúbrica resulta de a maior parte das empresas não apresentar resultdos desejáveis.

# Anexo 1: Modelo de programação liner para perfil conservador

| Função Objectivo | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 | W10 | W11 | W12 | W13 | W14 | W15 | W16 | W17 | W18 | W19 | W20 | W21 | W22 | W23 | W24 | W25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | DP- STB | DP- MBIM | DP- BCI | DP- FNB | DP- B. Mais | DP- ABC | DP- Eco Bank | DP- Moza Banco | DP- B. Unico | DP- Barclays | OB. da CMS | OB. Petromoc | OB. Petromoc II | OB. de Tesouro 2016 III serie | OB. BNI 2016 | P. MBIM | P. CDM | P. CMH | Edifici o sede | Edificio de Chimoio | Edificio de Liching a | Edificio de Namacha | Edificio Zambezia | Centro C. Regional | Fabrica de R. Maputo |
| **Retorno** | 12,49% | 11,37% | 12,97% | 4,08% | 7,54% | 1,49% | 23,32% | 10,34% | 7,70% | 7,71% | 24,14% | 10,15% | 10,99% | 10,75% | 17,60% | 35,08% | 17,29% | 34,29% | 3,29% | 16,17% | 4,67% | 0,05% | 0,88% | 0,81% | 5,36% |
| **Composição óptima** | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 10,00% |
| | **19,93%** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Restrições** | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 | W10 | W11 | W12 | W13 | W14 | W15 | W16 | W17 | W18 | W19 | W20 | W21 | W22 | W23 | W24 | W25 | **Real** | | **Máximo** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ∑Wi | | 100% |
| **Capital investido** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 100,00% | = | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 60,00% | = | 0,6 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | 15,00% | = | 0,15 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25,00% | = | 0,25 |
| **Composição máxima** | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 10,00% | ≤ | 15% |

# Anexo 2. Modelo de programação liner para perfil moderado

| Função Objectivo | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 | W10 | W11 | W12 | W13 | W14 | W15 | W16 | W17 | W18 | W19 | W20 | W21 | W22 | W23 | W24 | W25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | DP- STB | DP- MBIM | DP- BCI | DP- FNB | DP- B. Mais | DP- ABC | DP- Eco Bank | DP- Moza Banco | DP- B. Unico | DP- Barclays | OB. da CMS | OB. Petromoc | OB. Petromoc II | OB. de Tesouro 2016 III serie | OB. BNI 2016 | P. MBIM | P. CDM | P. CMH | Edificio sede | Edificio de Chimoio | Edificio de Lichinga | Edificio de Namacha | Edificio Zambezia | Centro C. Regional | Fabrica de R. Maputo |
| **Retorno** | 12,49% | 11,37% | 12,97% | 4,08% | 7,54% | 1,49% | 23,32% | 10,34% | 7,70% | 7,71% | 24,14% | 10,15% | 10,99% | 10,75% | 17,60% | 35,08% | 17,29% | 34,29% | 3,29% | 16,17% | 4,67% | 0,05% | 0,88% | 0,81% | 5,36% |
| **Composição óptima** | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 15,00% | 0,00% | 5,00% | 0,00% | 15,00% | 5,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% |
| | **20,20%** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Restrições** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | **Real** | | **Máximo** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ∑Wi | | 100% |
| **Capital investido** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 100,00% | = | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 45,00% | = | 0,45 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | 20,00% | = | 0,2 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 35,00% | = | 0,35 |
| **Composição máxima** | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 5,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | 5,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 15,00% | ≤ | 15% |

# Anexo 3. Modelo de programação liner para perfil agressivo

| Função Objectivo | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 | W10 | W11 | W12 | W13 | W14 | W15 | W16 | W17 | W18 | W19 | W20 | W21 | W22 | W23 | W24 | W25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | DP- STB | DP- MBIM | DP- BCI | DP- FNB | DP- B. Mais | DP- ABC | DP- Eco Bank | DP- Moza Banco | DP- B. Unico | DP- Barclays | OB. da CMS | OB. Petromoc | OB. Petromoc II | OB. de Tesouro 2016 III serie | OB. BNI 2016 | P. MBIM | P. CDM | P. CMH | Edificio sede | Edificio de Chimoio | Edificio de Lichinga | Edificio de Namacha | Edificio Zambezia | Centro C. Regional | Fabrica de R. Maputo |
| **Retorno** | 12,49% | 11,37% | 12,97% | 4,08% | 7,54% | 1,49% | 23,32% | 10,34% | 7,70% | 7,71% | 24,14% | 10,15% | 10,99% | 10,75% | 17,60% | 35,08% | 17,29% | 34,29% | 3,29% | 16,17% | 4,67% | 0,05% | 0,88% | 0,81% | 5,36% |
| **Composição óptima** | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 5,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% | 15,00% | 15,00% | 0,00% | 15,00% | 5,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 15,00% |
| | **21,25%** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Restrições** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | **Real** | | **Máximo** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ∑Wi | | 100% |
| **Capital investido** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 100,00% | = | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 20,00% | ≤ | 0,2 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | 45,00% | ≤ | 0,45 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 35,00% | ≤ | 0,35 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Real | | Máximo |
| **Composição máxima** | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | 15,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | 5,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 0,00% | ≤ | 15% |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 15,00% | ≤ | 15% |

## Anexo 4. Relatórios Emitidos pelo Microsoft Office Excel -*Solver* - Perfil Conservador

**Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report**
**Worksheet: [Retornos 1.7 (%) - simulado 2017.xlsx]Conservador**
**Report Created: 08/10/2018 16:45:06**

**Células Variáveis**

| Célula | Activo | Valor Final | Custo Reduzido | Objectivo Coeficiente | Admissível Aumentar | Admissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$8 | Composição óptima DP- STB | 0 | 0 | 0,124937028 | 0,004752367 | 0,011274439 |
| $E$8 | Composição óptima DP- MBIM | 0 | -0,011274439 | 0,113662589 | 0,011274439 | 1E+30 |
| $F$8 | Composição óptima DP- BCI | 0,15 | 0 | 0,129689394 | 1E+30 | 0,004752367 |
| $G$8 | Composição óptima DP- FNB | 0 | -0,084117074 | 0,040819954 | 0,084117074 | 1E+30 |
| $H$8 | Composição óptima DP- B. Mais | 0 | -0,049578716 | 0,075358312 | 0,049578716 | 1E+30 |
| $I$8 | Composição óptima DP- ABC | 0 | -0,11002569 | 0,014911338 | 0,11002569 | 1E+30 |
| $J$8 | Composição óptima DP- Eco Bank | 0,15 | 0 | 0,233194444 | 1E+30 | 0,108257417 |
| $K$8 | Composição óptima DP- Moza Banco | 0 | -0,021570075 | 0,103366953 | 0,021570075 | 1E+30 |
| $L$8 | Composição óptima DP- B. Unico | 0 | -0,047963992 | 0,076973036 | 0,047963992 | 1E+30 |
| $M$8 | Composição óptima DP- Barclays | 0 | -0,047850175 | 0,077086853 | 0,047850175 | 1E+30 |
| $N$8 | Composição óptima OB. da CMS | 0,15 | 0 | 0,241380137 | 1E+30 | 0,116443109 |
| $O$8 | Composição óptima OB. Petromoc | 0 | -0,023437028 | 0,1015 | 0,023437028 | 1E+30 |
| $P$8 | Composição óptima OB. Petromoc II | 0 | -0,015062028 | 0,109875 | 0,015062028 | 1E+30 |
| $Q$8 | Composição óptima OB. de Tesouro 2016 III serie | 0 | -0,017437028 | 0,1075 | 0,017437028 | 1E+30 |
| $R$8 | Composição óptima OB. BNI 2016 | 0,15 | 0 | 0,175981 | 1E+30 | 0,051043972 |
| $S$8 | Composição óptima P. MBIM | 0,15 | 0 | 0,350801316 | 1E+30 | 0,007903242 |
| $T$8 | Composição óptima P. CDM | 0 | -0,169999033 | 0,172899041 | 0,169999033 | 1E+30 |
| $U$8 | Composição óptima P. CMH | 0 | 0 | 0,342898074 | 0,007903242 | 0,169999033 |
| $V$8 | Composição óptima Edificio sede | 0 | -0,020679769 | 0,032884677 | 0,020679769 | 1E+30 |
| $W$8 | Composição óptima Edificio de Chimoio | 0,15 | 0 | 0,16174813 | 1E+30 | 0,108183684 |
| $X$8 | Composição óptima Edificio de Lichinga | 0 | -0,006849234 | 0,046715212 | 0,006849234 | 1E+30 |
| $Y$8 | Composição óptima Edificio de Namacha | 0 | -0,053040314 | 0,000524131 | 0,053040314 | 1E+30 |
| $Z$8 | Composição óptima Edificio Zambezia | 0 | -0,044759544 | 0,008804901 | 0,044759544 | 1E+30 |
| $AA$8 | Composição óptima Centro C. Regional | 0 | -0,045502866 | 0,008061579 | 0,045502866 | 1E+30 |
| $AB$8 | Composição óptima Fabrica de R. Maputo | 0,1 | 0 | 0,053564445 | 0,071372583 | 0,006849234 |

# Anexo 5. Restrições - Perfil Conservador

**Restrições**

| Célula | Nome | Valor Final | Preço Sombra | Restrição | Admissível Aumentar | Admissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| \$AC\$13 | Capital investido ∑Wi | 1 | 0,053564445 | 1 | 0 | 0,1 |
| \$AC\$14 | ∑Wi | 0,6 | 0,071372583 | 0,6 | 0,1 | 0 |
| \$AC\$15 | ∑Wi | 0,15 | 0,289333629 | 0,15 | 0,1 | 0 |
| \$AC\$16 | ∑Wi | 0,25 | 0 | 0,25 | 1E+30 | 0 |
| \$AC\$18 | Composição máxima ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$19 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$20 | ∑Wi | 0,15 | 0,004752367 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| \$AC\$21 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$22 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$23 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$24 | ∑Wi | 0,15 | 0,108257417 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| \$AC\$25 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$26 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$27 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$28 | ∑Wi | 0,15 | 0,116443109 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| \$AC\$29 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$30 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$31 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$32 | ∑Wi | 0,15 | 0,051043972 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| \$AC\$33 | ∑Wi | 0,15 | 0,007903242 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| \$AC\$34 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$35 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$36 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$37 | ∑Wi | 0,15 | 0,108183684 | 0,15 | 0,1 | 0,05 |
| \$AC\$38 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$39 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$40 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$41 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| \$AC\$42 | ∑Wi | 0,1 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,05 |

## Anexo 6. Relatórios Emitidos pelo Microsoft Office Excel -*Solver* - Perfil Moderado

**Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report**
**Worksheet: [Retornos 1.7 (% ) - simulado 2017.xlsx]Moderado**
**Report Created: 08/10/2018 17:10:44**

**Células Variáveis**

| Célula | Activo | Valor Final | Custo Reduzido | Objectivo Coeficiente | Admissível Aumentar | Admissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$8 | Composição óptima DP- STB | 0 | -0,004752367 | 0,124937028 | 0,004752367 | 1E+30 |
| $E$8 | Composição óptima DP- MBIM | 0 | -0,016026805 | 0,113662589 | 0,016026805 | 1E+30 |
| $F$8 | Composição óptima DP- BCI | 0 | 0 | 0,129689394 | 0,046291606 | 0,004752367 |
| $G$8 | Composição óptima DP- FNB | 0 | -0,08886944 | 0,040819954 | 0,08886944 | 1E+30 |
| $H$8 | Composição óptima DP- B. Mais | 0 | -0,054331082 | 0,075358312 | 0,054331082 | 1E+30 |
| $I$8 | Composição óptima DP- ABC | 0 | -0,114778057 | 0,014911338 | 0,114778057 | 1E+30 |
| $J$8 | Composição óptima DP- Eco Bank | 0,15 | 0 | 0,233194444 | 1E+30 | 0,10350505 |
| $K$8 | Composição óptima DP- Moza Banco | 0 | -0,026322441 | 0,103366953 | 0,026322441 | 1E+30 |
| $L$8 | Composição óptima DP- B. Unico | 0 | -0,052716359 | 0,076973036 | 0,052716359 | 1E+30 |
| $M$8 | Composição óptima DP- Barclays | 0 | -0,052602542 | 0,077086853 | 0,052602542 | 1E+30 |
| $N$8 | Composição óptima OB. da CMS | 0,15 | 0 | 0,241380137 | 1E+30 | 0,111690743 |
| $O$8 | Composição óptima OB. Petromoc | 0 | -0,028189394 | 0,1015 | 0,028189394 | 1E+30 |
| $P$8 | Composição óptima OB. Petromoc II | 0 | -0,019814394 | 0,109875 | 0,019814394 | 1E+30 |
| $Q$8 | Composição óptima OB. de Tesouro 2016 III serie | 0 | -0,022189395 | 0,1075 | 0,022189395 | 1E+30 |
| $R$8 | Composição óptima OB. BNI 2016 | 0,15 | 0 | 0,175981 | 1E+30 | 0,046291606 |
| $S$8 | Composição óptima P. MBIM | 0,15 | 0 | 0,350801316 | 1E+30 | 0,007903242 |
| $T$8 | Composição óptima P. CDM | 0 | -0,169999033 | 0,172899041 | 0,169999033 | 1E+30 |
| $U$8 | Composição óptima P. CMH | 0,05 | 0 | 0,342898074 | 0,007903242 | 0,169999033 |
| $V$8 | Composição óptima Edificio sede | 0 | -0,013830535 | 0,032884677 | 0,013830535 | 1E+30 |
| $W$8 | Composição óptima Edificio de Chimoio | 0,15 | 0 | 0,16174813 | 1E+30 | 0,115032918 |
| $X$8 | Composição óptima Edificio de Lichinga | 0,05 | 0 | 0,046715212 | 0,006849234 | 0,013830535 |
| $Y$8 | Composição óptima Edificio de Namacha | 0 | -0,04619108 | 0,000524131 | 0,04619108 | 1E+30 |
| $Z$8 | Composição óptima Edificio Zambezia | 0 | -0,03791031 | 0,008804901 | 0,03791031 | 1E+30 |
| $AA$8 | Composição óptima Centro C. Regional | 0 | -0,038653632 | 0,008061579 | 0,038653632 | 1E+30 |
| $AB$8 | Composição óptima Fabrica de R. Maputo | 0,15 | 0 | 0,053564445 | 1E+30 | 0,006849234 |

## Anexo 7. Restrições - Perfil Moderado

**Restrições**

| Célula | Nome | Valor Final | Preço Sombra | Restrição | Admissível Aumentar | Admissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $AC$13 | Capital investido ∑Wi | 1 | 0,046715212 | 1 | 1,11022E-16 | 0,05 |
| $AC$14 | ∑Wi | 0,45 | 0,082974183 | 0,45 | 0,05 | 0 |
| $AC$15 | ∑Wi | 0,2 | 0,296182863 | 0,2 | 0,05 | 1,11022E-16 |
| $AC$16 | ∑Wi | 0,35 | 0 | 0,35 | 1E+30 | 1,11022E-16 |
| $AC$18 | Composição máxima ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$19 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$20 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$21 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$22 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$23 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$24 | ∑Wi | 0,15 | 0,10350505 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| $AC$25 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$26 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$27 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$28 | ∑Wi | 0,15 | 0,111690743 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| $AC$29 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$30 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$31 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$32 | ∑Wi | 0,15 | 0,046291606 | 0,15 | 0 | 0,15 |
| $AC$33 | ∑Wi | 0,15 | 0,007903242 | 0,15 | 0,05 | 0,1 |
| $AC$34 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$35 | ∑Wi | 0,05 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,1 |
| $AC$36 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$37 | ∑Wi | 0,15 | 0,115032918 | 0,15 | 0,05 | 0,1 |
| $AC$38 | ∑Wi | 0,05 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,1 |
| $AC$39 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$40 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$41 | ∑Wi | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$42 | ∑Wi | 0,15 | 0,006849234 | 0,15 | 0,05 | 0,1 |

## Anexo 8. Relatórios Emitidos pelo Microsoft Office Excel -*Solver* - Perfil Agressivo

**Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report**
**Worksheet: [Retornos 1.7 (%) - simulado 2017.xlsx]Agressivo**
**Report Created: 08/10/2018 17:10:58**

**Células Variáveis**

| Célula | Activo | Valor Final | Custo Reduzido | Objectivo Coeficiente | Admissível Aumentar | Admissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$8 | Composição óptima DP- STB | 0 | -0,108257417 | 0,124937028 | 0,108257417 | 1E+30 |
| $E$8 | Composição óptima DP- MBIM | 0 | -0,119531855 | 0,113662589 | 0,119531855 | 1E+30 |
| $F$8 | Composição óptima DP- BCI | 0 | -0,10350505 | 0,129689394 | 0,10350505 | 1E+30 |
| $G$8 | Composição óptima DP- FNB | 0 | -0,19237449 | 0,040819954 | 0,19237449 | 1E+30 |
| $H$8 | Composição óptima DP- B. Mais | 0 | -0,157836132 | 0,075358312 | 0,157836132 | 1E+30 |
| $I$8 | Composição óptima DP- ABC | 0 | -0,218283107 | 0,014911338 | 0,218283107 | 1E+30 |
| $J$8 | Composição óptima DP- Eco Bank | 0,05 | 0 | 0,233194444 | 0,008185693 | 0,057213444 |
| $K$8 | Composição óptima DP- Moza Banco | 0 | -0,129827491 | 0,103366953 | 0,129827491 | 1E+30 |
| $L$8 | Composição óptima DP- B. Unico | 0 | -0,156221409 | 0,076973036 | 0,156221409 | 1E+30 |
| $M$8 | Composição óptima DP- Barclays | 0 | -0,156107592 | 0,077086853 | 0,156107592 | 1E+30 |
| $N$8 | Composição óptima OB. da CMS | 0,15 | 0 | 0,241380137 | 1E+30 | 0,008185693 |
| $O$8 | Composição óptima OB. Petromoc | 0 | -0,131694444 | 0,1015 | 0,131694444 | 1E+30 |
| $P$8 | Composição óptima OB. Petromoc II | 0 | -0,123319444 | 0,109875 | 0,123319444 | 1E+30 |
| $Q$8 | Composição óptima OB. de Tesouro 2016 III serie | 0 | -0,125694444 | 0,1075 | 0,125694444 | 1E+30 |
| $R$8 | Composição óptima OB. BNI 2016 | 0 | -0,057213444 | 0,175981 | 0,057213444 | 1E+30 |
| $S$8 | Composição óptima P. MBIM | 0,15 | 0 | 0,350801316 | 1E+30 | 0,304086104 |
| $T$8 | Composição óptima P. CDM | 0,15 | 0 | 0,172899041 | 1E+30 | 0,126183829 |
| $U$8 | Composição óptima P. CMH | 0,15 | 0 | 0,342898074 | 1E+30 | 0,296182863 |
| $V$8 | Composição óptima Edificio sede | 0 | -0,013830535 | 0,032884677 | 0,013830535 | 1E+30 |
| $W$8 | Composição óptima Edificio de Chimoio | 0,15 | 0 | 0,16174813 | 1E+30 | 0,115032918 |
| $X$8 | Composição óptima Edificio de Lichinga | 0,05 | 0 | 0,046715212 | 0,006849234 | 0,013830535 |
| $Y$8 | Composição óptima Edificio de Namacha | 0 | -0,04619108 | 0,000524131 | 0,04619108 | 1E+30 |
| $Z$8 | Composição óptima Edificio Zambezia | 0 | -0,03791031 | 0,008804901 | 0,03791031 | 1E+30 |
| $AA$8 | Composição óptima Centro C. Regional | 0 | -0,038653632 | 0,008061579 | 0,038653632 | 1E+30 |
| $AB$8 | Composição óptima Fabrica de R. Maputo | 0,15 | 0 | 0,053564445 | 1E+30 | 0,006849234 |

## Anexo 9. Restrições - Perfil Agressivo

**Restrições**

| Célula | Nome | Valor Final | Preço Sombra | Restrição | Admissível Aumentar | Admissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $AC$13 | Capital investido ∑Wi | 1 | 0,046715212 | 1 | 1,11022E-16 | 0,05 |
| $AC$14 | ∑Wi | 0,2 | 0,186479233 | 0,2 | 0,05 | 1,11022E-16 |
| $AC$15 | ∑Wi | 0,45 | 0 | 0,45 | 1E+30 | 5,55112E-17 |
| $AC$16 | ∑Wi | 0,35 | 0 | 0,35 | 1E+30 | 1,11022E-16 |
| $AC$18 | Composição máxima Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$19 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$20 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$21 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$22 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$23 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$24 | Real | 0,05 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,1 |
| $AC$25 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$26 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$27 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$28 | Real | 0,15 | 0,008185693 | 0,15 | 0,05 | 0,1 |
| $AC$29 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$30 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$31 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$32 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$33 | Real | 0,15 | 0,304086104 | 0,15 | 5,55112E-17 | 1,11022E-16 |
| $AC$34 | Real | 0,15 | 0,126183829 | 0,15 | 5,55112E-17 | 1,11022E-16 |
| $AC$35 | Real | 0,15 | 0,296182863 | 0,15 | 5,55112E-17 | 1,11022E-16 |
| $AC$36 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$37 | Real | 0,15 | 0,115032918 | 0,15 | 0,05 | 0,1 |
| $AC$38 | Real | 0,05 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,1 |
| $AC$39 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$40 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$41 | Real | 0 | 0 | 0,15 | 1E+30 | 0,15 |
| $AC$42 | Real | 0,15 | 0,006849234 | 0,15 | 0,05 | 0,1 |

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

**Faculdade de Economia**

**Exmos Senhores**
**Instituto Nacional de Segurança Social**
***MAPUTO***

**CREDENCIAL**

O Sr. **Leonardo José Langa** é estudante do Curso de Mestrado em Ciências Actuariais, nesta Faculdade.
No âmbito do plano de estudos ora em curso na nossa Faculdade, este estudante é chamado, nesta fase, a realizar trabalho de pesquisa relacionado com a formação, cujo tema se designa: "***Optimização de Carteiras de Investimentos em Segurança Social com base na Programação Linear'***"', junto da instituição supracitada.
Neste contexto a Faculdade de Economia aprecia o apoio de V.Exa. na disponibilização de toda informação relevante e possível para o sucesso do trabalho do estudante acima referido.

Com os nossos melhores cumprimentos.

Maputo, 12 de Julho de 2018

O Director

Doutor Fernando Lichucha
(Assistente Universitário)

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE ECONOMIA
REGISTO ACADÉMICO
MESTRADOS

adm

REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
17-07-18

Av. Julius Nyerere, Campus Principal, Caixa Postal 257, Telefone: +258 21 496301, Fax: +258 21 496301, www.economia.uem.mz
Maputo – Moçambique

REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

MINISTÉRIO DO TRABALHO, EMPREGO E SEGURANÇA SOCIAL

INSTITUTO NACIONAL DE SEGURANÇA SOCIAL

INSTITUTO NACIONAL DE SEGURANÇA SOCIAL
INSS
NATIONAL INSTITUTE OF SOCIAL SECURITY

**DEPARTAMENTO DE RECURSOS HUMANOS**

**REPARTIÇÃO DE FORMAÇÃO**

À:

**Faculdade de Economia da Universidade Eduardo Mondlane**

Av. Julius Nyerere - Campus Universitário Principal

**Maputo**

2574/INSS/DRH/RF/-024.11/2018

2018-08-15

Assunto: **Comunicação do Despacho**

Serve a presente para comunicar o Despacho do Exmo. Senhor Director - Geral, datado de 15/08/2018, recaído na Credencial datada de 02 de Julho de 2018, da Faculdade de Economia da Universidade Eduardo Mondlane, que solicita autorização para recolha de dados sobre o tema "***Optimização de Carteiras de Investimentos em Segurança Social com base na Programação Linear***", do Sr. **Leonardo José Langa,** estudante do curso de **Mestrado em Ciências Actuariais**, que a petição foi AUTORIZADA, devendo o mesmo se apresentar no Departamento de Recursos Humanos – Repartição de Formação, com um guião ou plano de trabalho, para melhor acompanhamento e disponibilização da informação necessária para o efeito.

Com os melhores cumprimentos

O CHEFE DA REPARTIÇÃO

FAUSTINO DE JESUS JERÓNIMO MASSOLONGA

(Técnico Superior de N1)

Cc. **Leonardo José Langa**

Sede: Av. 24 de Julho nº 3549, 6º Andar * Tel.: 21 403010/25, Fax: 21 400918, Cel.: 82 327 2820 * Email: inss@inss.gov.mz * www.inss.gov.mz * C.Postal nº 2551 - Maputo